Algebra 17. La vendetta — Roma, 24 gennaio 2010

1. Dimostrare che non è possibile costruire un angolo di 1 grado con riga e compasso.

2. (a) Ecco il famoso puzzle di *Sam Loyd* (statunitense noto per i suoi rompicapo, 1841–1911). Ci sono 15 blocchetti, numerati da 1 a 15, in un telaio. Utilizzando l'unica posizione vuota, essi si possono spostare orizzontalmente o verticalmente. Lo scopo del gioco è di ordinare i blocchetti da 1 a 15 per righe. Far vedere che questo è *impossibile* a partire dalla configurazione rappresentata a destra.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

   (b) Lo stesso gioco come in (a). In Trentino sanno ordinare i blocchetti cominciando dalla configurazione rappresentata a destra.
   Come mai?

33	tren	tini	an
da	va	no	per
Trento	tut	ti	33
trot	do	tan	

3. Calcolare il polinomio caratteristico della tavola pitagorica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}$$

4. Sia G un gruppo e sia $D = G'$ il suo sottogruppo dei commutatori. Sia $f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$ la mappa data da $x \mapsto \sigma_x$ dove $\sigma_x(h) = xhx^{-1}$ per ogni $h \in D$.
   (a) Dimostrare che $f(D)$ è contenuto nel sottogruppo $\mathrm{Aut}(D)'$ dei commutatori di $\mathrm{Aut}(D)$.
   (b) Dimostrare che $\mathrm{Inn}(D) \subset \mathrm{Aut}(D)'$.
   (c) Dimostrare che il gruppo simmetrico S_n non può essere sottogruppo dei commutatori di nessun gruppo.

5. (a) Per ogni $n \leq 10$ diverso da 5 esibire un anello R con $\#R^* = n$.
   (b) Dimostrare che non esiste un anello R con $\#R^* = 5$.