Corso di Dottorato di Roma2
Dalla meccanica statistica alla meccanica dei continui
G. Bellettini, E. Presutti, C. Sinestrari

Scopo principale del corso è lo studio di fenomeni di coesistenza di fase, con caratterizzazione della struttura fisica e geometrica delle interfacce che separano le diverse fasi e della loro evoluzione temporale.

La meccanica dei continui propone una teoria per spiegare questi fenomeni che porta ad un'evoluzione di interfacce regolata dalle leggi del moto per curvatura, mentre la loro forma geometrica all'equilibrio è determinata dalla costruzione di Wulff.

L'apparire di singolarità come per esempio fenomeni di "fattening" nel moto per curvatura o la presenza di angoli o spigoli nella forma di Wulff e, più in generale, l'analisi di microstrutture richiedono uno studio di scale spazio-temporali diverse, più microscopiche. La teoria mesoscopica si basa sull'introduzione di funzionali di energia libera che descrivono stati di non equilibrio e sono quindi in grado di descrivere microstrutture quali quelle che si vogliono investigare. La consistenza dell'approccio mesoscopico si basa su una dimostrazione che la teoria macroscopica fondata sulla meccanica dei continui può essere ricavata da quella mesoscopica tramite un'opportuno procedimento di limite (riscalamento spazio-temporale, sharp interface limits). Questa parte sfrutta per lo studio dell'equilibrio la teoria della Γ-convergenza di opportuni funzionali di energia libera, mentre la dinamica porta allo studio di limiti singolari in equazioni paraboliche.

Alcuni fenomeni di grande importanza fisica sono peró ancora assenti in queste teorie. La decomposozione spinodale e la metastabilità che descrivono la iniziale formazione delle fasi è legata a fenomeni di natura stocastica, assenti nelle precedenti teorie, la cui origine si attribuisce alla presenza di ulteriori gradi di libertà finora qui trascurati e che descrivono la struttura particellare del sistema. La loro trattazione richiede l'introduzione di concetti di meccanica statistica che, nell'accezione moderna, sviluppano le ipotesi originali di Gibbs e di Boltzmann.

La deduzione a partire dalla meccanica statistica, delle teorie mesoscopiche sino ad arrivare alla meccanica dei continui è tutt'altro che un fatto acquisito e molti problemi sono aperti (per non dire al di la' delle attuali possibilità). Scopo del corso è di discutere ed approfondire almeno alcuni di questi percorrendo la strada inversa a quella qui seguita, partendo cioè dalla meccanica statistica per andare verso la meccanica dei continui.

Un altro aspetto che verrà approfondito è lo studio del moto per curvatura media. Questo studio trova un'importante motivazione nei modelli fisici trattati nel corso e presenta anche un notevole interesse di per sé dal punto di vista analitico. Una caratteristica di queste evoluzioni è la formazione di singolarità in tempo finito. Ciò ha portato da un lato a studiare in dettaglio il profilo asintotico delle interfacce per tempi vicini a quello in cui si formano le singolarità, dall'altro a definire un'evoluzione generalizzata secondo la curvatura media in presenza di singolarità. Vi sono diversi possibili approcci all'evoluzione generalizzata e i legami tra di essi non sono stati ancora del tutto chiariti.

Dopo aver richiamato alcune nozioni di base della teoria delle misure di Gibbs, si vedrà come ottenere, con opportuni processi di limite che coinvolgono potenziali di Kac, funzionali di energia libera del tipo di quelli proposti nella teoria mesoscopica.

Si "salterà" poi alla teoria macroscopica, con lo studio del moto per curvatura. In particolare si ricorderanno i risultati di Gage-Hamilton e Huisken sulla formazione di singolarità e si esporrà l'approccio degli insiemi di livello per definire una soluzione generalizzata nell'ambito delle soluzioni per viscosità. Si ricorderà poi il teorema di Wulff per la determinazione della superficie di equilibrio e il corso si concluderà con la discussione del processo di limite che consente di colmare il gap tra questa e la prima parte del corso. Si vedrà infatti come ricavare la teoria macroscopica a partire da quella mesoscopica, qui si presenteranno elementi di Γ-convergenza e come trattare il limite singolare (sharp interface limit) di equazioni di Allen-Cahn e di evouzione non locale.