CAPITOLO III: SISTEMI LINEARI.

Vincenzo Di Gennaro

1. Sistemi lineari e notazioni.

Nel primo capitolo abbiamo dato la definizione di dimensione, e nel secondo capitolo abbiamo imparato come si calcola la dimensione. In questo capitolo vedremo un'applicazione del concetto di dimensione, nello studio dei cosiddetti sistemi lineari, che ora andremo a definire, e che hanno una grande importanza anche in Fisica ed in Ingegneria.

Ricordiamo prima cosa e' un'equazione di primo grado in una incognita. Dati due numeri $a, b \in \mathbf{R}$, *un'equazione di primo grado nell'incognita* x e' la scrittura

$$ax = b.$$

Una *soluzione* per tale equazione e' un numero $y \in \mathbf{R}$ tale che $ay = b$. *Risolvere l'equazione* $ax = b$ significa andare a trovare tutte le possibili soluzioni dell'equazione. Per le equazioni di primo grado in una incognita tale problema si risolve cosi'.

$$\begin{cases} \text{se } a \neq 0 \text{ allora esiste un' unica soluzione } y, \text{ ed e' } y = \frac{b}{a}; \\ \text{se } a = 0 \text{ allora } \begin{cases} \text{se } b \neq 0 \text{ non ci sono soluzioni;} \\ \text{se } b = 0 \text{ ci sono infinite soluzioni, tale essendo ogni } y \in \mathbf{R}. \end{cases} \end{cases}$$

Questo problema puo' essere generalizzato in vari modi. Si possono aumentare le incognite, si puo' aumentare il numero di equazioni.[1] Si perviene cosi' alla nozione di sistema lineare.

• *La definizione di sistema lineare.*

Un *sistema lineare in n incognite ed m equazioni* e' una scrittura del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove a_{ij} e b_i denotano dei numeri reali, e le lettere $x_1, x_2, \dots, x_n$ si chiamano *le incognite (o variabili) del sistema lineare.* Le singole espressioni $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ si

[1] Si potrebbe anche aumentare il grado dell'equazione, ma noi non studieremo questo caso, in generale molto piu' difficile. Vedremo qualcosa nel capitolo 7, per una singola equazione di secondo grado.

chiamano *le equazioni del sistema lineare.* I numeri a_{ij} si chiamano anche *i coefficienti del sistema lineare*, mentre i numeri b_i si chiamano *i termini noti.* A volte denoteremo il sistema con una lettera tipo $\mathcal{S}$. Quando le incognite sono poche si possono anche denotare con i simboli $x, y, z, \dots$. I coefficienti del sistema si possono disporre sotto forma di matrice $A = (a_{ij})$, $m \times n$, che prende il nome di *matrice incompleta di* $\mathcal{S}$. Accanto alla matrice incompleta si considera anche *la matrice completa*, che denoteremo generalmente con B, ed e' la matrice che si ottiene da A aggiungendo la colonna dei termini noti $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$. Cioe':

$$B = [A \,|\, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

In particolare A e' di tipo $m \times n$, mentre B e' di tipo $m \times (n+1)$, cioe' B ha una colonna in piu' rispetto ad A.[2] Una *soluzione*[3] del sistema lineare $\mathcal{S}$ e' un vettore numerico (colonna) $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n = \mathcal{M}(n,1)$ tale che *per ogni* $i = 1, 2, \dots, m$ si ha

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = b_i.$$

In altre parole, una soluzione per $\mathcal{S}$ e' una $n-$pla ordinata di numeri $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ tale che, quando tali numeri sono sostituiti al posto delle incognite $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, *tutte* le uguaglianze che appaiono nelle equazioni del sistema $\mathcal{S}$ sono soddisfatte. Denoteremo con $Sol(\mathcal{S})$ l'insieme di tutte le soluzioni di $\mathcal{S}$:

$$Sol(\mathcal{S}) := \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \,:\, a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = b_i \text{ per ogni } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Per definizione, $Sol(\mathcal{S})$ e' un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n = \mathcal{M}(n,1)$, e come tale potrebbe essere anche vuoto. Se $Sol(\mathcal{S})$ e' vuoto, cioe' se non esistono soluzioni per $\mathcal{S}$, diremo che il sistema $\mathcal{S}$ e' *incompatibile.* Se invece $Sol(\mathcal{S})$ non e' vuoto, cioe' se esiste almeno una soluzione per $\mathcal{S}$, diremo che il sistema $\mathcal{S}$ e' *compatibile.*

- *Cosa vuol dire risolvere un sistema lineare.*

Lo scopo di questo capitolo e' *risolvere un sistema lineare*, cioe' dare una descrizione dell'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S})$, analoga a quella che abbiamo visto a proposito dell'equazione di primo grado in una incognita. E cioe' come si riconosce se un sistema lineare e' compatibile oppure no, e, nel caso sia compatibile, come sono fatte le sue soluzioni. Vedremo che tale descrizione e' *governata* dal rango della matrice incompleta e di quella completa.

Osservazione. Sottoinsiemi del tipo $Sol(\mathcal{S}) \subseteq \mathbf{R}^n$ sono detti *sottospazi affini di* $\mathbf{R}^n$. In generale i sottospazi affini non sono sottospazi vettoriali, lo sono solo quando

[2] Le componenti della colonna A^j di posto j di A sono tutti i coefficienti che appaiono accanto all' incognita x_j nelle equazioni del sistema lineare $\mathcal{S}$. Percio' diremo anche che la *colonna* A^j *corrisponde all'incognita* x_j.

[3] In qualche libro invece del termine "soluzione" si usa la parola "zero".

$\mathbf{b} = \mathbf{0}$, cioe' quando i termini noti sono nulli. Per esempio, se identifichiamo $\mathbf{R}^2$, tramite l'applicazione delle coordinate (v. Capitolo 4), con lo spazio $\mathcal{V}_{O,\rho}$ dei vettori geometrici di un piano ρ, applicati in un punto fissato $O \in \rho$, l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S})$ di una sola equazione $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$ corrisponde ad una retta ℓ di $\mathcal{V}_{O,\rho}$. E una retta ℓ e' un sottospazio di $\mathcal{V}_{O,\rho}$ se e solo se ℓ passa per O, cioe' se e solo se $b_1 = 0$. Tuttavia c'e' un nesso tra la retta ℓ di equazione $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$ e la retta ℓ_0 di equazione $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, e cioe' che ℓ_0 e' la retta parallela ad ℓ passante per l'origine O. Questo e' un caso particolare di una proprieta' generale che stabilisce un nesso tra i sottospazi affini ed i sottospazi vettoriali, e che studieremo piu' in la'.[4]

Esempio. Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

Tale sistema $\mathcal{S}$ ha 4 incognite e 3 equazioni. La matrice dei coefficienti, cioe' la matrice incompleta, e' la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

La matrice completa B si ottiene da A aggiungendo la colonna dei termini noti:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il vettore $\mathbf{y}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)^T$ e' una soluzione di $\mathcal{S}$, cioe' $\mathbf{y}_1 \in Sol(\mathcal{S})$. Invece il vettore $\mathbf{y}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, -1\right)^T$ non e' una soluzione. Adesso faremo un'osservazione che ci consentira' di alleggerire le notazioni.

Abbiamo detto che un vettore $\mathbf{y}$ e' una soluzione di $\mathcal{S}$ se e solo se

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 - y_2 - y_3 + 3y_4 = 0 \\ 3y_1 + 4y_4 = 1. \end{cases}$$

[4] Piu' in generale, i sottospazi affini di $\mathbf{R}^3$ corrispondono, via l'applicazione delle coordinate, ai punti, alle rette ed ai piani in $\mathcal{V}_O$, non necessariamente passanti per l'origine O. Quelli che passano per O sono i sottospazi vettoriali. Da un punto di vista "geometrico" i sottospazi affini ed i sottospazi vettoriali formano le stesse "figure". Queste figure sono tra le piu' semplici, sia perche' rappresentabili con equazioni di primo grado, sia perche' facilmente "immaginabili". E sono anche tra le piu' importanti, perche' una qualunque altra "figura" (ragionevole) puo' essere approssimata con spazi affini. Per esempio, se consideriamo una figura curvilinea, una curva, allora sappiamo dall'Analisi Matematica che la curva puo' essere approssimata, localmente intorno ad un suo punto, con la "retta tangente" nel punto. Similmente, una "superficie" puo' essere approssimata localmente in un punto con un piano, il "piano tangente". Per questi motivi, ed altri che vedremo nel capitolo 7, il corso si chiama "Geometria".

Cio' equivale a dire che i seguenti vettori numerici di $\mathbf{R}^3$ sono uguali:

$$\begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ y_1 - y_2 - y_3 + 3y_4 \\ 3y_1 + 4y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto della definizione di prodotto tra matrici, possiamo interpretare il primo membro a sinistra come il prodotto tra la matrice incompleta A con il vettore colonna $\mathbf{y}$. Percio' $\mathbf{y}$ e' una soluzione di $\mathcal{S}$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cioe' se e solo se

$$A \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

- *La notazione matriciale di un sistema lineare.*

Sulla base dell'esempio precedente, possiamo rappresentare un sistema lineare $\mathcal{S}$ con il simbolo

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove con A denotiamo la matrice incompleta, con $\mathbf{x}$ la colonna delle incognite, e con $\mathbf{b}$ il vettore colonna dei termini noti. Si osservi che scritto cosi', un sistema lineare appare analogo all'equazione di primo grado $ax = b$. Cio' suggerisce di trovare le soluzioni di $\mathcal{S}$ allo stesso modo con cui le abbiamo trovate per l'equazione $ax = b$. Ed in effetti si puo' portare avanti questa analogia,[5] ma lo vedremo dopo, prima andiamo a vedere come si risolve un sistema lineare con le operazioni elementari.

2. Risoluzione di un sistema lineare tramite le operazioni elementari.

Ci sono due modi per risolvere un sistema lineare, uno basato sulle operazioni elementari, ed un altro sul calcolo dei determinanti. Il primo metodo, che per prima studieremo, e', da un punto di vista computazionale, piu' veloce rispetto al secondo, che invece ha un grande interesse teorico.

La risoluzione di un sistema lineare tramite le operazioni elementari si basa su una serie di passi che, messi insieme, costituiscono un vero e proprio algoritmo.

1) Il primo passo di questo algoritmo si basa sulla seguente osservazione. Supponiamo di partire da un sistema lineare in n incognite

$$\mathcal{S}:\ A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

[5] Si potrebbe dire subito, per esempio, che se A e' quadrata ed invertibile, allora $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione $\mathbf{y}$, ed e' $\mathbf{y} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Rimarrebbe pero' da spiegare cosa succede se A non e' invertibile, oppure se A non e' quadrata.

di cui vogliamo conoscere l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S})$. Sia

$$B = [A \,|\, \mathbf{b}]$$

la matrice completa di $\mathcal{S}$. Riduciamo a scala per righe la matrice B. Otterremo una matrice a scala per righe B' del tipo

$$B' = [A' \,|\, \mathbf{b}'],$$

ed A' sara' evidentemente la riduzione a scala di A. Possiamo interpretare la matrice B' come la matrice completa di un nuovo sistema lineare, cioe'

$$\mathcal{S}' : A' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$

L'interesse di questo nuovo sistema lineare consiste in due fatti. Innanzitutto *il sistema lineare $\mathcal{S}$ ha le stesse soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}'$*. Cio' si spiega facilmente cosi': poiche' le equazioni di $\mathcal{S}'$ sono combinazioni lineari delle equazioni di $\mathcal{S}$, e' chiaro che le soluzioni di $\mathcal{S}$ saranno anche soluzioni per $\mathcal{S}'$, cioe' $Sol(\mathcal{S}) \subseteq Sol(\mathcal{S}')$. D'altra parte, poiche' le operazioni elementari sono invertibili, possiamo portare B' in B con le operazioni inverse. Allora per lo stesso motivo di prima si avra' $Sol(\mathcal{S}') \subseteq Sol(\mathcal{S})$, dunque $Sol(\mathcal{S}) = Sol(\mathcal{S}')$.[6] Percio', allo scopo di studiare $Sol(\mathcal{S})$, possiamo anche limitarci a studiare $Sol(\mathcal{S}')$. L'altro fatto importante e' che *essendo B' ridotta a scala per righe, e' facile calcolare le soluzioni di $\mathcal{S}'$*. Questo e' quanto ora andiamo a vedere nei passi successivi.

2) A questo punto occorre distinguere due casi. Potrebbe accadere che il rango di B' (che e' il rango di B) sia diverso dal rango di A' (che e' il rango di A). In tal caso nel sistema $\mathcal{S}'$ deve apparire un'equazione del tipo $0 = 1$. Quindi il sistema $\mathcal{S}'$ e' incompatibile. Lo sara' anche $\mathcal{S}$.

3) Supponiamo invece che il rango di B' sia uguale a quello di A'. In tal caso il sistema e' compatibile. Infatti le soluzioni si trovano come segue. Denotiamo con p il rango di A' (che e' uguale al rango di B, B' ed A). Tale numero si chiama *il rango di $\mathcal{S}$*. In B' ci saranno esattamente p righe non nulle. Poiche' A' e B' hanno lo stesso rango, i pivots di tali righe stanno in A'. Percio' in A' ci saranno p colonne che passano per i pivots delle righe non nulle di B'. *Per semplicita' supponiamo che siano le prime p colonne di A'*. Tali colonne corrispondono alle prime p variabili. Le variabili rimanenti, cioe' (nel nostro caso) le variabili $x_{p+1}, \dots, x_n$, si chiamano *le variabili libere del sistema*

[6] In altri termini questo argomento prova che, *dati due sistemi lineari $\mathcal{S} : A\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ed $\mathcal{S}' : A'\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, se lo spazio delle righe delle corrispondenti due matrici complete B e B' coincidono, allora $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ hanno le stesse soluzioni.* E' interessante osservare che vale anche il viceversa. Cioe' si puo' provare che, *dati due sistemi lineari $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ed $\mathcal{S}' : A' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$, se sono compatibili ed hanno le stesse soluzioni, allora le corrispondenti due matrici complete B e B' hanno lo stesso spazio delle righe.* In altre parole, *un sottospazio affine di $\mathbf{R}^n$ determina, a meno di combinazioni lineari, le sue equazioni.* Questo fatto ammette una generalizzazione nel caso dei sistemi di equazioni di grado qualsiasi, nota sotto il nome di *Teorema degli zeri di Hilbert (Hilbert Nullstellensatz).*

$\mathcal{S}$. Si osservi che *il numero delle variabili libere e' $n - p$, cioe' e' pari al numero delle incognite meno il rango del sistema*:[7]

$$\text{numero di variabili libere} = n - p.$$

4) Se portiamo le variabili libere a destra, al secondo membro del sistema $\mathcal{S}'$, grazie ai pivots che abbiamo lasciato a sinistra, partendo dall'ultima equazione e procedendo a ritroso, *possiamo calcolare per sostituzione le variabili non libere $x_1, \dots, x_p$, univocamente determinate in funzione delle variabili libere.* Si otterranno espressioni del tipo

$$x_1 = x_1(x_{p+1}, \dots, x_n),\ x_2 = x_2(x_{p+1}, \dots, x_n),\ \dots, x_p = x_p(x_{p+1}, \dots, x_n),$$

dove ciascun $x_i(x_{p+1}, \dots, x_n)$ e' un polinomio di primo grado nelle variabili libere.[8] Lo stesso modo con cui abbiamo ottenuto tali espressioni ci dice che *tutte e sole le soluzioni di $\mathcal{S}$ sono i vettori numerici della forma*:

$$(x_1(x_{p+1}, \dots, x_n), x_2(x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, x_p(x_{p+1}, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n)^T,$$

al variare liberamente di $x_{p+1}, \dots, x_n$ in $\mathbf{R}$. L'espressione precedente e' *la rappresentazione parametrica di $Sol(\mathcal{S})$*, detta anche *la soluzione generale di $\mathcal{S}$*. Per sottolineare il fatto che le variabili libere sono $n - p$, si dice anche che il sistema lineare $\mathcal{S}$ ammette ∞^{n-p} soluzioni. La rappresentazione parametrica si puo' anche vedere come un'applicazione biiettiva tra lo spazio $\mathbf{R}^{n-p}$ delle variabili libere, e $Sol(\mathcal{S})$, cioe':

$$\begin{bmatrix} x_{p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n-p} \to \begin{bmatrix} x_1(x_{p+1}, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p(x_{p+1}, \dots, x_n) \\ x_{p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{S}).$$

In particolare, a livello insiemistico, abbiamo:

$$Sol(\mathcal{S}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1(x_{p+1}, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p(x_{p+1}, \dots, x_n) \\ x_{p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \ : \ x_{p+1}, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}.$$

[7] Questa formula dovrebbe essere imparata a memoria.

[8] Per esempio, l'ultima equazione non nulla di $\mathcal{S}'$ sara' del tipo $a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + \cdots + a_{pn}x_n = b_p$ con $a_{pp} \neq 0$, e percio' $x_p = \frac{1}{a_{pp}}[-(a_{pp+1}x_{p+1} + \cdots + a_{pn}x_n) + b_p]$. Poi si passa alla penultima equazione, e similmente, avendo calcolato x_p, per sostituzione, si riesce a calcolare x_{p-1} in funzione di $x_{p+1}, \dots, x_n$. E cosi' via a ritroso.

Esempio. Andiamo a risolvere il seguente sistema lineare:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

Risolvere il sistema lineare significa dare una descrizione di tutte le sue soluzioni, cioe' dare una *rappresentazione parametrica di* $Sol(\mathcal{S})$. Seguiremo l'algoritmo indicato in precedenza. Innanzitutto scriviamo la matrice completa del sistema, che e':

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la sottomatrice di B formata dalle prime quattro colonne e' la matrice incompleta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Poi riduciamo a scala per righe B, pervenendo alla matrice

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo interpretare B' come la matrice completa di un nuovo sistema lineare

$$\mathcal{S}' := \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$$

I sistemi lineari $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ hanno le stesse soluzioni. Quindi risolvere $\mathcal{S}$ equivale a risolvere $\mathcal{S}'$. Si osservi che la sottomatrice di B'

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

altro non e' che la riduzione a scala per righe di A. Poiche' A' e B' hanno lo stesso rango (che e' $p = 2$) allora anche A e B hanno lo stesso rango (cioe' $p = 2$) e quindi il sistema $\mathcal{S}$ e' compatibile, cioe' ammette soluzioni. Anzi sappiamo che ammette ∞^2 soluzioni (qui $2 =$ numero incognite $-$ rango $= 4 - 2$). Cio' significa che possiamo descrivere $Sol(\mathcal{S})$ tramite due variabili libere (dette anche parametri liberi). Vediamo come si determinano le variabili libere. Nella matrice A' consideriamo le colonne che passano per i pivots delle righe non nulle: sono la prima e la seconda colonna. Le colonne rimanenti, cioe' la terza e la quarta, corrispondono alle variabili x_3 e x_4: queste sono le variabili libere. *In generale le variabili libere sono le variabili che corrispondono* *alle colonne di A' che non passano per i pivots delle righe di A'.* Ora nel sistema $\mathcal{S}'$ portiamo a destra le variabili libere

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 - 3x_4 \\ 3x_2 = 1 - 3x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Partendo dall'ultima equazione e procedendo a ritroso per sostituzione ci calcoliamo le variabili x_1 e x_2 in funzione delle variabili libere. Cosi' facendo deduciamo che la soluzione generale di $\mathcal{S}$ e':

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4, \frac{1}{3} - x_3 + \frac{5}{3}x_4, x_3, x_4\right)^T$$

al variare liberamente di x_3 e x_4 in $\mathbf{R}$. Questa e' la rappresentazione parametrica per $Sol(\mathcal{S})$.

Per esempio, se poniamo $x_3 = 0$ ed $x_4 = 0$ otteniamo la soluzione $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)^T$, se poniamo $x_3 = 1$ ed $x_4 = 0$ otteniamo la soluzione $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right)^T$, se poniamo $x_3 = 0$ ed $x_4 = 1$ otteniamo la soluzione $(-1, 2, 0, 1)^T$, se poniamo $x_3 = 1$ ed $x_4 = 3$ otteniamo la soluzione $\left(-\frac{11}{3}, \frac{13}{3}, 1, 3\right)^T$. Facendo scorrere x_3, x_4 in $\mathbf{R}$ otterremo ∞^2 soluzioni.

Un altro modo per scrivere la rappresentazione parametrica consiste nello scrivere la seguente applicazione

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \to \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4 \\ \frac{1}{3} - x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{S}),$$

(si osservi che tale applicazione e' biiettiva), oppure nello scrivere l'uguaglianza di insiemi:

$$Sol(\mathcal{S}) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4 \\ \frac{1}{3} - x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \,:\, x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Osservazione. (i) In base all'algoritmo precedente, le variabili libere di un sistema lineare sono univocamente determinate. Ma in realta' non lo sono, nel senso che se non eseguiamo esattamente i passi cosi' come li abbiamo formulati, possiamo individuare anche altre variabili libere, in funzione delle quali calcolare la soluzione generale.[9] Tuttavia, come proveremo in seguito, il *numero* delle variabili libere non puo' cambiare. Con riferimento all'esempio precedente, anche le variabili x_2 ed x_4 possono essere considerate come variabili libere. Infatti l'applicazione

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \to \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4 \\ x_2 \\ \frac{1}{3} - x_2 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{S})$$

[9] In modo tale che la corrispondente rappresentazione parametrica sia biiettiva e definita da polinomi di primo grado nelle variabili libere.

e' biiettiva. Si osservi che puo' accadere che una certa variabile non possa mai far parte di un insieme di variabili libere. Per esempio nel sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

ci sono ∞^1 soluzioni, si puo' assumere come variabile libera x_2, oppure x_3, ma mai x_1.

(ii) Come corollario dell'algoritmo appena discusso, osserviamo che *un sistema lineare $\mathcal{S}$ e' compatibile se e solo se il rango della matrice incompleta coincide con il rango della matrice completa.* Questo importante criterio e' noto in letteratura con il nome di *Teorema di Rouche'-Capelli.* Dopo ne vedremo una dimostrazione diversa.

(iii) Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare in n variabili, compatibile, di rango p. Se $n = p$ allora il sistema ammette ∞^0 soluzioni, cioe' un'unica soluzione. Discuteremo tra poco questo caso, quando vedremo come risolvere un sistema lineare con l'uso dei determinanti. Per esempio, il sistema lineare

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, data dal vettore $(2, -1)$. In questo caso non ci sono variabili libere, e la rappresentazione parametrica si riduce all'applicazione costante $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^0 \to (2, -1) \in Sol(\mathcal{S})$ (con $\mathbf{R}^0$ si denota lo spazio nullo $\{\mathbf{0}\}$).

Esercizio. Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, si consideri il sistema lineare

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} 2kx + (k+2)y + (k+4)z = k+5 \\ kx + (k+1)y + 2z = 3 \\ kx + y + z = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema $\mathcal{S}_k$ e' compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per $Sol(\mathcal{S}_k)$.

Svolgimento. Consideriamo la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$:

$$B_k = \begin{bmatrix} 2k & k+2 & k+4 & k+5 \\ k & k+1 & 2 & 3 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con le operazioni p_{13}, $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-2)$, $e_{32}(-1)$ perveniamo alla seguente matrice (generalmente a scala per righe):

$$B' = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 & k+1 \end{bmatrix},$$

che possiamo interpretare come la matrice completa di un sistema lineare

$$\mathcal{S}'_k : \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ ky + z = 2 \\ (k+1)z = k+1 \end{cases}$$

che ha le stesse soluzioni di $\mathcal{S}_k$.

Se k e' diverso da -1 e 0, allora A'_k e B'_k hanno lo stesso rango $p = 3$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' compatibile, ed ha un'unica soluzione data dal vettore numerico $\frac{1}{k^2}(-1, k, k^2)^T$.

Se $k = -1$ allora A'_{-1} e B'_{-1} hanno lo stesso rango $p = 2$, il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ e' compatibile, ed ha ∞^1 soluzioni date dal vettore numerico $(2z - 3, z - 2, z)^T$, al variare liberamente di z in $\mathbf{R}$.

Se $k = 0$ allora A'_0 ha rango 2, mentre B'_0 ha rango 3. Percio' in tal caso il sistema $\mathcal{S}_0$ non e' compatibile.

Avendo discusso tutti i casi possibili, l'esercizio finisce qui. ■

3. Risoluzione di un sistema lineare tramite i determinanti.

E' possibile pervenire alla risoluzione di un sistema lineare anche usando i determinanti, invece delle operazioni elementari. Prima di vedere questo nuovo metodo, esamineremo due casi particolari: il Teorema di Rouche'-Capelli, di cui daremo una dimostrazione diversa, ed il caso in cui la matrice incompleta e' quadrata ed invertibile. In tal caso si dice che il sistema lineare e' di Cramer. E' un caso particolarmente interessante perche' si puo' studiare come un'equazione di primo grado del tipo $ax = b$, ed anche perche' il caso generale si riconduce a questo. Come vedremo, un sistema di Cramer ammette un'unica soluzione, ed esistono delle formule esplicite (la regola di Cramer) che esprimono le componenti della soluzione in funzione dei coefficienti e dei termini noti del sistema. Le operazioni elementari non forniscono queste formule.

• *Il Teorema di Rouche'-Capelli.*

Sia $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare in n incognite ed m equazioni. Allora $\mathcal{S}$ e' compatibile se e solo se la matrice incompleta e la matrice completa di $\mathcal{S}$ hanno lo stesso rango.

Dimostrazione. Supponiamo che il sistema sia compatibile. Sia $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ una soluzione. Allora $A \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$. Da cui:

$$\mathbf{b} = A \cdot \mathbf{y} = A \cdot (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n) = y_1(A \cdot \mathbf{e}_1) + y_2(A \cdot \mathbf{e}_2) + \cdots + y_n(A \cdot \mathbf{e}_n).$$

Tenuto conto che $A \cdot \mathbf{e}_j$ coincide con la colonna A^j di posto j di A, deduciamo

$$\mathbf{b} = y_1A^1 + y_2A^2 + \cdots + y_nA^n.$$

Cio' vuol dire che la colonna dei termini noti, che e' l'ultima colonna di B, e' una combinazione lineare delle colonne di A. Il che implica che lo spazio delle colonne di A coincide con quello di B. Quindi A e B hanno lo stesso rango.

Viceversa, supponiamo che A e B abbiano lo stesso rango. Allora una base per lo spazio delle colonne di A e' anche una base per lo spazio delle colonne di B. In particolare, la colonna dei termini noti $\mathbf{b}$ e' una combinazione lineare delle colonne di A. Cioe' esistono opportuni pesi $y_1, y_2, \dots, y_n$ tali che

$$\mathbf{b} = y_1 A^1 + y_2 A^2 + \cdots + y_n A^n.$$

Ripercorrendo a ritroso i passaggi precedenti deduciamo che $A \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Questo vuol dire che $\mathbf{y}$ e' una soluzione per $\mathcal{S}$, quindi $\mathcal{S}$ e' compatibile. ■

- *I sistemi lineari di Cramer.*

Un sistema lineare $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ si dice *sistema di Cramer* se A e' una matrice quadrata invertibile. In tal caso vale il seguente

Teorema di Cramer. Sia $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema di Cramer. Allora $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione, ed e'

$$\mathbf{y} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

Dimostrazione. Prima di cominciare la dimostrazione osserviamo che noi gia' sappiamo che $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione in quanto, se il sistema e' di Cramer, allora A e B hanno necessariamente lo stesso rango dato dal numero delle incognite. Percio' $\mathcal{S}$ e' compatibile ed ammette ∞^0 soluzioni, cioe' una sola soluzione.

Esistenza. Consideriamo il vettore $\mathbf{y} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Allora

$$A \cdot \mathbf{y} = A \cdot (A^{-1} \cdot \mathbf{b}) = (A \cdot A^{-1}) \cdot \mathbf{b} = I \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Cio' vuol dire proprio che $\mathbf{y} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ e' una soluzione per $\mathcal{S}$.

Unicita'. Sia $\mathbf{z}$ una soluzione per $\mathcal{S}$. Allora avremo $A \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b}$. Quindi:

$$\mathbf{z} = I \cdot \mathbf{z} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \mathbf{z} = A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{z}) = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{y}.$$

Cioe' $\mathbf{z}$ deve essere uguale ad $\mathbf{y}$. ■

Come abbiamo visto nel capitolo sulle matrici, per l'inversa di una matrice disponiamo di formule esplicite. Utilizzando tali formule per la soluzione di un sistema di Cramer, si ottiene una corrispondente formula detta *la regola di Cramer.*

- *La regola di Cramer.*

Sia $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema di Cramer con n incognite, $A = (a_{ij})$ la matrice dei coefficienti, e sia $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ l'unica soluzione del sistema. Allora, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ si ha:

$$y_i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}.$$

Cioe' la componente y_i di posto i di $\mathbf{y}$ coincide con la frazione che ha al denominatore il determinante della matrice A dei coefficienti, ed al numeratore il determinante di quella matrice che si ottiene da A sostituendo la colonna A^i di A di posto i, con il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\mathbf{y} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

D'altra parte sappiamo anche che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*,$$

dove con $A^* = (a^*_{ij})$ denotiamo la matrice aggiunta classica di A. Percio', tenuto conto della definizione di prodotto riga per colonna, abbiamo:

$$y_i = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)_i \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\det A}(a^*_{i1}b_1 + a^*_{i2}b_2 + \cdots + a^*_{in}b_n).$$

La dimostrazione finisce qui, perche' il numero $a^*_{i1}b_1 + a^*_{i2}b_2 + \cdots + a^*_{in}b_n$ coincide con lo sviluppo di Laplace del determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

rispetto alla colonna di posto i. ■

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -7. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

e' quadrata, di ordine 2, ed e' invertibile. Percio' questo sistema e' di Cramer, ammette un'unica soluzione $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, che possiamo calcolare in due modi: o con le operazioni elementari, oppure con la regola di Cramer. La regola di Cramer ci dice che:

$$y_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}} = -\frac{1}{3}, \qquad y_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}} = \frac{10}{3}.$$

- *Risoluzione di un sistema lineare tramite i determinanti.*

Siamo in condizione di vedere come si risolve un sistema lineare con l'uso dei determinanti. Cioe' di vedere come ottenere una rappresentazione parametrica delle soluzioni di un sistema lineare con l'uso dei determinanti. Questo metodo, a parte un dettaglio, consente di ottenere la soluzione generale di un sistema lineare senza cambiarne le equazioni, al contrario di come si fa con le operazioni elementari. L'idea e' di ricondursi ad un sistema di Cramer.

Sia
$$\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
un sistema lineare con m equazioni, ed n incognite. Supponiamo che il sistema sia compatibile, cosa che siamo in grado di appurare a priori grazie al criterio di Rouche'-Capelli. Sia p il rango di $\mathcal{S}$. Allora lo spazio delle righe della matrice completa B ha rango p, e percio' in B ci saranno $m - p$ righe sovrabbondanti, che possiamo togliere, perche', cosi' facendo, non alteriamo l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}$. In altre parole:

possiamo supporre che $m = p$,

cioe' che le equazioni di $\mathcal{S}$ siano indipendenti. D'altra parte anche A ha rango p. Percio' possiamo individuare un minore fondamentale M di B di ordine p, che sia una sottomatrice di A. Per semplificare le notazioni, supponiamo che tale minore M sia formato dalle prime p colonne di A. Ora portiamo a secondo membro dell'espressione $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ le $n - p$ variabili $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$. Otterremo un'espressione del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1p+1}x_{p+1} + a_{1p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 - (a_{2p+1}x_{p+1} + a_{2p+2}x_{p+2} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p - (a_{pp+1}x_{p+1} + a_{pp+2}x_{p+2} + \cdots + a_{pn}x_n). \end{cases}$$

Questa espressione puo' essere riguardata come un sistema di Cramer di ordine p, nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_p$, con matrice incompleta data dal minore fondamentale M, e termine noto che dipende dalle variabili $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$. Percio', assegnato un qualunque vettore numerico $(y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^{n-p}$, in corrispondenza di tale vettore esiste un'unica soluzione $(y_1, y_2, \dots, y_p)^T \in \mathbf{R}^p$ del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1p+1}y_{p+1} + a_{1p+2}y_{p+2} + \cdots + a_{1n}y_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 - (a_{2p+1}y_{p+1} + a_{2p+2}y_{p+2} + \cdots + a_{2n}y_n) \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p - (a_{pp+1}y_{p+1} + a_{pp+2}y_{p+2} + \cdots + a_{pn}y_n) \end{cases}$$

(che, per inciso, potremmo calcolare con la regola di Cramer). E' chiaro che il vettore $(y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$ e' una soluzione per $\mathcal{S}$, e che l'applicazione

$$(y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^{n-p} \to (y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n)^T \in Sol(\mathcal{S})$$

e' un'applicazione biiettiva, ed e' la rappresentazione parametrica cercata per l'insieme delle soluzioni del sistema assegnato $\mathcal{S}$.

Esempio. Andiamo a risolvere il seguente sistema lineare:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

riconducendoci, come abbiamo detto prima, ad un sistema di Cramer. Questo sistema e' compatibile ed ha rango $p = 2$. Le prime due equazioni sono indipendenti, percio' possiamo togliere la terza equazione e studiare il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha le stesse soluzioni di $\mathcal{S}$. Le prime due colonne di A sono libere, percio' portiamo a destra le variabili rimanenti x_3 ed x_4.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 = x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Interpretiamo questo sistema come un sistema di Cramer di ordine 2 nelle variabili x_1, x_2. Dalla regola di Cramer sappiamo che

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 - x_3 - x_4 & 1 \\ x_3 - 3x_4 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{3}(1 - 4x_4),$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 - x_3 - x_4 \\ 1 & x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{3}(1 - 3x_3 + 5x_4).$$

La rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni e':

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \to \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4 \\ \frac{1}{3} - x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{S}).$$

4. Sistemi lineari omogenei.

Sia $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare in n incognite ed m equazioni. L'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S})$ di S e' un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$. Possiamo chiederci se e' oppure no un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$. La risposta e' molto semplice.

- *L'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ se e solo se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.*

Dimostrazione. Se $Sol(\mathcal{S})$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ allora $\mathbf{0}_{\mathbf{R}^n} \in Sol(\mathcal{S})$. Cioe' $A \cdot \mathbf{0}_{\mathbf{R}^n} = \mathbf{b}$. Ma $A \cdot \mathbf{0}_{\mathbf{R}^n} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m}$, dunque $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m}$. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m}$. Quindi il sistema $\mathcal{S}$ e' del tipo:

$$\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m}.$$

E' chiaro che $\mathbf{0}_{\mathbf{R}^n}$ e' una soluzione per $\mathcal{S}$. Se poi $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ sono due qualunque soluzioni di $\mathcal{S}$ e c e' uno scalare qualunque, allora:

$$A \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{x}') = A \cdot \mathbf{x} + A \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m} + \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m}, \quad A \cdot (c\mathbf{x}) = c \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = c \cdot \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m} = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^m}.$$

Quindi anche $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ e $c \cdot \mathbf{x}$ sono soluzioni, in definitiva $Sol(\mathcal{S})$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. ■

- *La definizione di sistema lineare omogeneo.*

Un sistema lineare si dice omogeneo se tutti i suoi termini noti sono nulli. In altre parole un sistema lineare omogeneo e' della forma:

$$\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

In base a quanto abbiamo appena visto, possiamo dire che *un sistema lineare $\mathcal{S}$ e' omogeneo se e solo se l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S})$ di $\mathcal{S}$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ (n = numero delle incognite di $\mathcal{S}$).* Si osservi che un sistema omogeneo e' sempre compatibile, perche' ammette come soluzione almeno la soluzione nulla $\mathbf{0}$.

Sia ora $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo in n incognite, e sia

$$U := Sol(\mathcal{S}) \subseteq \mathbf{R}^n$$

l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}$, che abbiamo appena riconosciuto essere un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$. E' naturale chiedersi che dimensione abbia U, e come fare a trovarne una base. Anche in questo caso la risposta e' molto semplice.

- *Sia*

$$f : \mathbf{R}^{n-p} \to U = Sol(\mathcal{S})$$

una rappresentazione parametrica delle soluzioni di $\mathcal{S}$, dove n e' il numero delle incognite di $\mathcal{S}$, e p e' il rango di $\mathcal{S}$. Allora:

1) La base canonica di $\mathbf{R}^{n-p}$ corrisponde, via f, ad una base di U.

2) In particolare $\dim U = n - p$.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa su alcune nozioni che impareremo nel Capitolo 4, sulle applicazioni lineari. Percio' lo studente potrebbe rinviare la lettura a dopo, una volta studiato il Capitolo 4.

Cio' premesso, veniamo alla dimostrazione. Ricordiamo che possiamo pensare ad una rappresentazione parametrica come un' applicazione che porta un vettore $(y_{p+1}, \dots, y_n)^T$ di $\mathbf{R}^{n-p}$ in un vettore $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n)^T \in Sol(\mathcal{S})$, le cui componenti sono polinomi di primo grado nelle variabili libere $y_{p+1}, \ldots, y_n$, con termini noti nulli, tale essendo $\mathbf{b}$. Cio' implica che f e' un'applicazione lineare. Poiche' f e' biiettiva, allora f e' un isomorfismo tra $\mathbf{R}^{n-p}$ ed U. E sappiamo che gli isomorfismi portano basi in basi (vedere Capitolo 4). ■

Un' importante conseguenza della proprieta' precedente, che utilizzeremo nella ricerca degli autovalori di un operatore lineare nel Capitolo 4, e' il seguente:

• *Corollario. Sia $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo in n incognite ed n equazioni (per cui A e' una matrice quadrata di ordine n). Sia $U = Sol(\mathcal{S})$ l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}$. Allora:*

$$\dim U > 0 \iff \det A = 0.$$

Dimostrazione. Sia p il rango di A, che e' il rango del sistema $\mathcal{S}$. Poiche' $\dim U = n - p$, allora $\dim U > 0$ se e solo se $n - p > 0$, cioe' se e solo se $p < n$, cioe' se e solo se A non ha rango massimo. E noi sappiamo che cio' equivale a dire che $\det A = 0$. ■

Esempio. Consideriamo il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ 5x - y + 5z + 5t = 0 \\ x + z + t = 0. \end{cases}$$

Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ costituito dalle soluzioni di $\mathcal{S}$. Vogliamo calcolare una base e la dimensione di U. Riducendo a scala il sistema lineare, otteniamo il sistema

$$\mathcal{S}' : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

che ha le stesse soluzioni di $\mathcal{S}$. Le variabili libere sono z, t. Quindi otteniamo la seguente rappresentazione parametrica di U:

$$(z, t)^T \in \mathbf{R}^2 \to (-z - t, 0, z, t)^T \in U.$$

Per quanto detto prima, $\dim U = 2$ ed una base per U e' data dai vettori che corrispondono alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, cioe' dai vettori $(-1, 0, 1, 0)^T$, $(-1, 0, 0, 1)^T$.[10]

5. La rappresentazione cartesiana di un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

[10] Possiamo dimostrare direttamente il fatto che tali vettori formano una base per U osservando che: 1) tali vettori stanno in U; 2) tali vettori sono liberi; 3) tali vettori generano U. Infatti dalla rappresentazione cartesiana sappiamo che ogni vettore di U e' della forma $(-z - t, 0, z, t)^T = z(-1, 0, 1, 0)^T + t(-1, 0, 0, 1)^T$. In particolare osserviamo che le variabili libere z, t sono le coordinate del generico vettore di U rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(-1, 0, 1, 0)^T, (-1, 0, 0, 1)^T\}$. Cio' vuol dire che la funzione inversa della rappresentazione parametrica e' l'applicazione delle coordinate di U rispetto alla base $\mathcal{B}$. (cfr. Capitolo 4).

Abbiamo visto che, dato un sistema lineare omogeneo $\mathcal{S}$ con n incognite, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. E' naturale porsi la seguente domanda.

• *Domanda: viceversa, dato un sottospazio U di $\mathbf{R}^n$, esiste un sistema lineare omogeneo tale che U ne sia l'insieme delle soluzioni?*

La risposta e' affermativa, come andremo a vedere fra poco. Prima pero' diamo la seguente definizione, motivata da quanto appena detto.

• *La definizione di rappresentazione cartesiana di un sottospazio di $\mathbf{R}^n$.*

Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. Si definisce *rappresentazione cartesiana di* U un qualunque sistema lineare omogeneo $\mathcal{S}$ tale che $U = Sol(\mathcal{S})$.

La seguente proposizione risponde affermativamente alla domanda che ci siamo posti prima.

• *Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. Allora esiste una rappresentazione cartesiana di U.*

Dimostrazione. La dimostrazione che ora andiamo a vedere e' un vero e proprio algoritmo, che consente di calcolare una rappresentazione cartesiana di U a partire da una base assegnata di U.

Sia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$ una base di U. Sia $\mathbf{x}$ il generico vettore di $\mathbf{R}^n$, e sia M la matrice, con n righe ed $h+1$ colonne, che ha per colonne i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h, \mathbf{x}$. E' chiaro che il rango di M e' almeno h. Il punto chiave della dimostrazione e' la seguente osservazione:

$$\mathbf{x} \in U \iff \mathrm{rk} M = h.$$

Ora sia S la matrice a scala per righe che si ottiene da M con l'algoritmo di Gauss. La matrice S, come M, ha n righe ed $h+1$ colonne, e le prime h righe di S sono necessariamente non nulle perche' le prime h colonne di M formano una base di U, quindi sono libere. Cio' implica che le prime h colonne di S passano per gli h pivots delle prime h righe. Nell'ultima colonna di S, al di sotto della riga di posto h, appariranno $n-h$ componenti in funzione del generico vettore $\mathbf{x}$. Indichiamo con $l_{h+1}(\mathbf{x}), \dots, l_n(\mathbf{x})$ tali ultime $n-h$ componenti dell'ultima colonna di S. Le funzioni $l_j(\mathbf{x})$ sono funzioni omogenee di primo grado nelle componenti di $\mathbf{x}$ perche' si ottengono tramite operazioni elementari, ed il rango di S sara' esattamente h se e solo se tali funzioni si annullano. Per cui la rappresentazione cartesiana cercata di U sara' data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} l_{h+1}(\mathbf{x}) = 0 \\ l_{h+2}(\mathbf{x}) = 0 \\ \dots \\ l_n(\mathbf{x}) = 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Osservazione. (i) La dimostrazione precedente mostra anche che se h e' la dimensione di U allora esiste una rappresentazione cartesiana di U con esattamente $n-h$ equazioni. E' chiaro che in generale una qualunque altra rappresentazione cartesiana di U dovra' avere almeno $n-h$ equazioni.

(ii) Nel caso particolare in cui U e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $n-1$, cioe' nel caso in cui $h = n-1$, allora la matrice M definita nel corso della dimostrazione precedente e' una matrice quadrata di ordine n, e la rappresentazione cartesiana di U sara' data semplicemente dall'imporre che il determinante di M sia nullo, cioe' $\det M = 0$. In particolare, quando $U \subseteq \mathbf{R}^n$ e $\dim U = n-1$, allora U ammette una rappresentzione cartesiana con una sola equazione.[11]

Esercizio. Trovare una rappresentazione cartesiana del sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1,0,1,0)^T$, $(-1,0,0,1)^T$.

Svolgimento. Sia $\mathbf{x} := (x,y,z,t)^T$ il generico vettore di $\mathbf{R}^4$. Allora $\mathbf{x} \in U$ se e solo se la matrice

$$M := \begin{bmatrix} -1 & -1 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

ha rango $2 = \dim U$. Riducendo a scala M si perviene alla matrice

$$S := \begin{bmatrix} -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & x+z+t \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Allora S ha rango 2 se e solo se

$$\begin{cases} x+z+t=0 \\ y=0. \end{cases}$$

Questa e' la rappresentazione cartesiana cercata di U. ■

Esercizio. Trovare una rappresentazione cartesiana del sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,-1,3)^T$, $(2,1,1)^T$.

Svolgimento. Sappiamo che U puo' essere rappresentato con una sola equazione, cioe'

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe'

$$4x - 5y - 3z = 0. \quad ■$$

[11] I sottospazi di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $n-1$ si chiamano *iperpiani*.

6. Studio dell'intersezione di due sottospazi vettoriali.

La rappresentazione cartesiana riesce utile nello studio dell'intersezione di due sottospazi, che avevamo, in parte, lasciato in sospeso nel primo capitolo sugli spazi vettoriali. Infatti si ha quanto segue.

• *Una rappresentazione cartesiana $\mathcal{S}$ per l'intersezione $U \cap V$ di due sottospazi U e V di $\mathbf{R}^n$ si ottiene mettendo a sistema le equazioni che formano una rappresentazione cartesiana di U con quelle che formano una rappresentazione cartesiana di V. Ne consegue che risolvendo il sistema lineare $\mathcal{S}$ cosi' ottenuto, come indicato in precedenza, possiamo calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.*

Esercizio. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ si considerino i sottospazi

$$U := Span((1,-1,3),(2,1,1)), \quad V = Span((0,1,2),(2,0,1)).$$

Calcolare la dimensione e una base di $U \cap V$.

Svolgimento. Possiamo procedere cosi'. Con il metodo imparato in precedenza ci calcoliamo una rappresentazione cartesiana di U, che e' $4x - 5y - 3z = 0$, ed una rappresentazione cartesiana di V, che e' $x + 4y - 2z = 0$. Allora una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e'

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si vede che la dimensione di $U \cap V$ e' 1, ed una base di $U \cap V$ e' formata dal vettore $(22, 5, 21)$. $\blacksquare$

Osservazione. Naturalmente questo non e' l'unico modo per calcolare una base e la dimensione di $U \cap V$. Un altro metodo si basa sul seguente ragionamento, in parte gia' svolto in un esercizio del primo capitolo sugli spazi vettoriali. Sia $\mathbf{z}$ un vettore di $U \cap V$ nell'esercizio precedente (questo argomento vale in generale, ma per semplicita' lo discutiamo solo per l'esempio precedente). Allora sono univocamente determinati pesi $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tali che

$$\mathbf{z} = a(1,-1,3) + b(2,1,1) = c(0,1,2) + d(2,0,1).$$

Il vettore numerico (a, b, c, d) e' una soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\mathcal{T} : \begin{cases} a + 2b - 2d = 0 \\ -a + b - c = 0 \\ 3a + b - 2c - d = 0. \end{cases}$$

Percio' e' ben definita l'applicazione

$$f : \mathbf{z} \in U \cap V \to (a, b, c, d) \in Sol(\mathcal{T}).$$

E' chiaro che f e' biiettiva. Inoltre, poiche'

$$f(\mathbf{z}+\mathbf{z}') = f(\mathbf{z}) + f(\mathbf{z}'), \quad \text{e} \quad f(c\mathbf{z}) = cf(\mathbf{z})$$

per ogni $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in U \cap V$ ed ogni scalare $c \in \mathbf{R}$, allora f e' anche un'applicazione lineare (vedere Capitolo 4). Ne consegue che f e' un isomorfismo, e percio' mette in corrispondenza le basi di $U \cap V$ con le basi di $Sol(\mathcal{T})$. A questo punto possiamo risolvere il sistema lineare omogeneo $\mathcal{T}$, ci calcoliamo una base di $Sol(\mathcal{T})$ (che e' un sottospazio di $\mathbf{R}^4$), ed i vettori di $U \cap V$ che corrispondono tramite f a tale base di $Sol(\mathcal{T})$, costituiranno una base di $U \cap V$.

Nel nostro caso il sistema lineare omogeneo $\mathcal{T}$ ha ∞^1 soluzioni, generate dal vettore $(a, b, c, d) = (4, 9, 5, 11)$. Quindi $\dim U \cap V = 1$, ed una base per $U \cap V$ e' costituita dal vettore $\mathbf{z}$ che corrisponde al vettore $(a, b, c, d) = (4, 9, 5, 11)$ tramite f, cioe' dal vettore

$$\mathbf{z} = 4(1, -1, 3) + 9(2, 1, 1) = 5(0, 1, 2) + 11(2, 0, 1) = (22, 5, 21).$$

Osservazione. Attenzione: il sistema lineare $\mathcal{T}$ non e' una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$.

7. Il sistema omogeneo associato.

Sia $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare. Il sistema lineare

$$\mathcal{S}^* : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

che si ottiene da $\mathcal{S}$ ponendo $\mathbf{0}$ al posto di $\mathbf{b}$ si chiama *il sistema lineare omogeneo associato ad* $\mathcal{S}$. L'interesse del sistema omogeneo associato consiste nella seguente proprieta'.

• *Sia* $\mathcal{S} : A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *un sistema lineare compatibile, e fissiamo una soluzione* $\mathbf{y}_0$ *di* $\mathcal{S}$. *Allora tutte e sole le soluzioni di* $\mathcal{S}$ *si ottengono sommando ad* $\mathbf{y}_0$ *tutte le soluzioni di* $\mathcal{S}^*$. *Cioe':*

$$Sol(\mathcal{S}) = \{\mathbf{y}_0 + \mathbf{u} : \ \mathbf{u} \in Sol(\mathcal{S}^*)\}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y}$ una soluzione di $\mathcal{S}$. Allora abbiamo

$$A \cdot \mathbf{y}_0 = A \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Percio' abbiamo

$$A \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}.$$

Cioe' il vettore $\mathbf{u} := \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ e' una soluzione di $\mathcal{S}^*$. Poiche'

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{u},$$

questo argomento prova che

$$Sol(\mathcal{S}) \subseteq \{\mathbf{y}_0 + \mathbf{u} : \ \mathbf{u} \in Sol(\mathcal{S}^*)\}.$$

Rimane da provare l'altra inclusione. A tale proposito sia

$$\mathbf{y} := \mathbf{y}_0 + \mathbf{u}$$

un qualunque vettore numerico che si possa scrivere come la somma di $\mathbf{y}_0$ e di una soluzione $\mathbf{u}$ di $\mathcal{S}^*$. Allora

$$A \cdot \mathbf{y} = A \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{y}_0 + A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Questo vuol dire che un qualunque vettore $\mathbf{y}$ della forma $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in Sol(\mathcal{S}^*)$, e' una soluzione di $\mathcal{S}$. ■

Esempio. Consideriamo il sistema lineare

$$\mathcal{S} := \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

Il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathcal{S}$ e' il sistema omogeneo:

$$\mathcal{S}^* := \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Abbiamo visto che la soluzione generale di $\mathcal{S}$ e' data dal vettore:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4 \\ \frac{1}{3} - x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Di questo vettore, separando le costanti dalle variabili, otteniamo la seguente decomposizione:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

In tale decomposizione riconosciamo il vettore delle costanti come la soluzione particolare di $\mathcal{S}$ che si ottiene da $\mathbf{y}$ ponendo $x_3 = x_4 = 0$:

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ed il vettore

$$\mathbf{u} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

come la soluzione generale del sistema omogeneo associato $\mathcal{S}^*$.

Osservazione. (i) In altre parole, la proprieta' precedente si puo' esprimere dicendo che la soluzione generale di un sistema e' la somma di una soluzione particolare con la soluzione generale del sistema omogeneo associato. Percio', per risolvere un sistema lineare, e' sufficiente conoscerne una soluzione particolare, e saper risolvere il sistema omogeneo associato, che ci si aspetta essere piu' semplice. Il fatto di poter risolvere un problema riconducendosi ad un problema "omogeneo" appare anche in altri contesti. Uno di questi contesti e' lo studio dei sistemi lineari di equazioni differenziali, che studieremo dopo nel Capitolo 6. Un altro contesto e' quello delle "equazioni alle differenze finite".

(ii) In alcuni libri si usa la seguente notazione:

$$\mathbf{y}_0 + Sol(\mathcal{S}^*) := \{\mathbf{y}_0 + \mathbf{u} : \ \mathbf{u} \in Sol(\mathcal{S}^*)\} .$$

Percio' possiamo anche scrivere

$$Sol(\mathcal{S}) = \mathbf{y}_0 + Sol(\mathcal{S}^*).$$

Indice dei paragrafi.