Sistemi lineari omogenei.

1) Sia $\mathcal{S} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare in n incognite. $\mathcal{S}$ si dice *omogeneo* se i termini noti sono nulli, cioe' se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

2) L'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ se e solo se $\mathcal{S}$ e' omogeneo. In tal caso, posto $U := Sol(\mathcal{S})$, allora si dice che $\mathcal{S} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e' una *rappresentazione cartesiana di* U. Inoltre $dim(U) = n - p$, dove p e' il rango di A, e una base di U si ottiene in corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^{n-p}$ in una rappresentazione parametrica per $Sol(\mathcal{S})$. Per cui data una rappresentazione cartesiana di un sottospazio U sappiamo come calcolare una base di U.

3) **Esempio 1**. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ che ammette come rappresentazione cartesiana il seguente sistema:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ 5x - y + 5z + 5t = 0 \\ x + z + t = 0. \end{cases}$$

Trovare la dimensione ed una base per U. Procediamo cosi'. Andiamo a risolvere il sistema assegnato. Troveremo la seguente rappresentazione parametrica per $U = Sol(\mathcal{S})$:

$$(z, t)^T \in \mathbf{R}^2 \leftrightarrow (-z - t, 0, z, t)^T \in U.$$

In tale corrispondenza il vettore $(1, 0)^T$ corrisponde a $(-1, 0, 1, 0)^T$, mentre $(0, 1)^T$ corrisponde a $(-1, 0, 0, 1)^T$. Allora la dimensione di U e' 2 ed una sua base e' formata dai vettori $(-1, 0, 1, 0)^T$, $(-1, 0, 0, 1)^T$.

4) Viceversa, dato un sottospazio U di $\mathbf{R}^n$ con base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$, per trovare una rappresentazione cartesiana di U si puo' procedere nel seguente modo: detto $\mathbf{x}$ il generico vettore di $\mathbf{R}^n$, allora $\mathbf{x} \in U$ *se e solo se il rango della matrice* M *che ha per colonne i vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h, \mathbf{x}$ *e'* h. Dopodiche' si riduce a scala la matrice M e si impone che la sua riduzione a scala abbia esattamente h righe non nulle. Questa imposizione comporta l'annullamento di certe componenti, e tale annullamento fornisce le equazioni della rappresentazione cartesiana di U.

Piu' precisamente, detta S la matrice a scala per righe che si ottiene a partire da M, allora tale matrice ha n righe e $h+1$ colonne, e le prime h righe sono necessariamente non nulle perche' le prime h colonne di M formano una base di U. Cio' implica che le prime h colonne di S passano per gli h pivots delle prime h righe. Nell'ultima colonna, al di sotto della riga di posto h, appariranno $n - h$ componenti in funzione delle componenti del generico vettore $\mathbf{x}$. Indichiamo con $l_{h+1}(\mathbf{x}), \dots, l_n(\mathbf{x})$ tali ultime $n - h$ componenti dell'ultima colonna di S. Le funzioni $l_j(\mathbf{x})$ sono funzioni omogenee di primo grado nelle componenti di $\mathbf{x}$, ed il rango di S sara' h se e solo se tali funzioni si annullano. Per cui la rappresentazione cartesiana cercata di U sara' data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} l_{h+1}(\mathbf{x}) = 0 \\ l_{h+2}(\mathbf{x}) = 0 \\ \dots \\ l_n(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Nel caso in cui U e' un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $n-1$, cioe' nel caso in cui $h = n-1$, allora M e' una matrice quadrata $n \times n$, e la rappresentazione cartesiana di U sara' semplicemente data dall'imporre che il determinante di M sia nullo, cioe' $\det(M) = 0$.

5) **Esempio 2**. Trovare una rappresentazione cartesiana del sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$. Si procede cosi'. Detto $\mathbf{x} := (x, y, z, t)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^4$, allora $\mathbf{x} \in U$ se e solo se la matrice

$$M := \begin{bmatrix} -1 & -1 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

ha rango $2 = \dim(U)$. Riducendo a scala M si perviene alla matrice

$$S := \begin{bmatrix} -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & x+z+t \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Allora S ha rango 2 se e solo se

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Questa e' la rappresentazione cartesiana cercata di U.

6) Conoscere la rappresentazione cartesiana riesce utile nello studio dell'intersezione di due sottospazi. Infatti *una rappresentazione cartesiana per l'intersezione di due sottospazi U e V si ottiene considerando il sistema omogeneo che si forma unendo le equazioni che formano una rappresentazione cartesiana di U con quelle che formano una rappresentazione cartesiana di V.*

7) **Esempio 3**. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ si considerino i sottospazi

$$U := Span((1, -1, 3), (2, 1, 1)), \quad V = Span((0, 1, 2), (2, 0, 1)).$$

Calcolare la dimensione e una base di $U \cap V$. Possiamo procedere cosi'. Con il metodo imparato in precedenza ci calcoliamo una rappresentazione cartesiana di U, che e' $4x - 5y - 3z = 0$, ed una rappresentazione cartesiana di V, che e' $x + 4y - 2z = 0$. Allora una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e'

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Per risovere tale sistema consideriamo la matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dopo le operazioni p_{12} ed $e_{21}(-4)$ otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -21 & 5 \end{bmatrix}.$$

Quindi la variabile libera e' z e la generica soluzione del sistema, cioe' il generico vettore di di $U \cap V$ e':

$$\left(\frac{22}{21}z, \frac{5}{21}z, z\right).$$

In conclusione la dimensione di $U \cap V$ e' 1, ed una base di $U \cap V$ e' formata dal vettore $(22, 5, 21)$.