Applicazioni lineari e matrici.

1) *Lo spazio Hom*(V, V').

Siano V e V' spazi vettoriali, e denotiamo con

$$\mathrm{Hom}(V, V')$$

l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V a V'. Se f e g sono due applicazioni lineari tra V e V', e $c \in \mathbf{R}$ e' uno scalare, possiamo definire

$$f + g : V \to V'$$

come l'applicazione che trasforma $\mathbf{u}$ in $f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u})$, cioe'

$$(f + g)(\mathbf{u}) := f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}),$$

e

$$c \cdot f : V \to V'$$

come l'applicazione che trasforma $\mathbf{u}$ in $c \cdot f(\mathbf{u})$, cioe'

$$(c \cdot f)(\mathbf{u}) := c \cdot f(\mathbf{u}).$$

Poiche' f e g sono lineari anche $f + g$ e $c \cdot f$ lo sono. Pertanto queste due operazioni definiscono una struttura algebrica

$$(\mathrm{Hom}(V, V'), +, \cdot).$$

Tale struttura e' uno spazio vettoriale.

2) *Gli spazi Hom*(V, V') *ed* $\mathcal{M}(m, n)$ *sono isomorfi.*

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi di V e V', allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f + g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)$$

e

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(c \cdot f) = c \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f).$$

In altre parole l'applicazione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : f \in \mathrm{Hom}(V, V') \to M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}(m, n)$$

e' un'applicazione lineare (qui naturalmente n e' la dimensione di V, ed m quella di V'). Questa applicazione e' in realta' un isomorfismo, in quanto e' biiettiva. Per provare che e' biiettiva possiamo costruire direttamente la sua inversa

$$f^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathcal{M}(m, n) \to \mathrm{Hom}(V, V')$$

ponendo
$$f_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(A) := [\quad]_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ f_A \circ [\quad]_{\mathcal{B}},$$
dove con f_A denotiamo l'applicazione
$$f_A : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \to A \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m.$$
Poiche'
$$f_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = id_{\mathrm{Hom}(V,V')} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \circ f_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = id_{\mathcal{M}(m,n)}$$
segue che $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ e' un isomorfismo.

L'esistenza dell'isomorfismo $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ significa che lo studio delle applicazioni lineari e' equivalente allo studio delle matrici. Tuttavia occorre tener presente che l'isomorfismo $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ non e' naturale, nel senso che se si cambiano le basi allora cambia l'isomorfismo.

3) *Il caso $V = V'$.*

Quando $V = V'$ allora su $\mathrm{Hom}(V, V)$, oltre all'addizione interna ed alla moltiplicazione esterna, abbiamo anche una moltiplicazione interna data dalla composizione. Cioe', cosi' come $\mathcal{M}(n, n)$, $\mathrm{Hom}(V, V)$ e' una algebra:
$$(\mathrm{Hom}(V, V), +, \cdot, \circ).$$
Poiche' la matrice rappresentativa di $g \circ f$ e' il prodotto della matrice rappresentativa di g per quella di f, allora l'isomorfismo di spazi vettoriali $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ (adesso assumiamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$), oltre ad essere compatibile rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione esterna, e' compatibile anche rispetto alla moltiplicazione interna. Cioe'
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$
Cio' si esprime dicendo che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e' un isomorfismo di algebre. In alcuni testi l'algebra $\mathrm{Hom}(V, V)$ si denota anche con il simbolo $\mathrm{End}(V)$, e gli operatori del tipo $f : V \to V$ si chiamano anche *endomorfismi* di V.

3) *La sostituzione di una matrice e di un endomorfismo in un polinomio.*

Sia
$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_h t^h$$
un polinomio. Poiche' sia $\mathcal{M}(n, n)$ che $\mathrm{Hom}(V, V)$ sono algebre, ha senso sostituire in $p(t)$ sia una matrice quadrata A, che un endomorfismo $f : V \to V$. Cioe' possiamo definire
$$p(A) := a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_h A^h \in \mathcal{M}(n, n),$$
e
$$p(f) := a_0 id_V + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_h f^h \in \mathrm{Hom}(V, V)$$

(con f^r si intende la composizione di f con se stesso $f \circ f \circ \cdots \circ f$ r volte). Osserviamo che, comunque si assegnino polinomi $p(t)$ e $q(t)$, una matrice A ed un operatore f, valgono le seguenti proprieta' di calcolo:

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A), \quad (p \cdot q)(A) = p(A) \cdot q(A) = q(A) \cdot p(A)$$

$$(p+q)(f) = p(f) + q(f), \quad (p \cdot q)(f) = p(f) \cdot q(f) = q(f) \cdot p(f).$$

In queste formule, con il simbolo $p \cdot q$ denotiamo il prodotto tra i due polnomi p e q. In virtu' dell'isomorfismo di algebre descritto in precedenza, si ha anche

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p(f)) = p(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$$

dove $\mathcal{B}$ denota, come al solito, una qualunque base fissata di V.

4) *La relazione di similitudine tra matrici.*

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio V, e fissiamo due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V. Possiamo allora considerare le due matrici rappresentative

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f).$$

Vale la seguente formula:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V).$$

Posto $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$, possiamo scrivere la formula precedente in una forma piu' semplice:

$$A' = P^{-1}AP.$$

Cio' motiva la seguente definizione.

Siano A ed A' due matrici quadrate dello stesso ordine n. Diremo che A e' *simile* (o *coniugata*) ad A' se esiste una matrice invertibile P tale che $A' = P^{-1}AP$. Valgono le seguenti proprieta'.

(i) Nell'insieme delle matrici quadrate $\mathcal{M}(n,n)$, la relazione di similitudine e' una relazione di equivalenza.

(ii) Due matrici A ed A' sono simili se e soltanto se esiste un endomorfismo $f : V \to V$ e basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V tali che $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ (cioe' due matrici sono simili se e soltanto se rappresentano uno stesso endomorfismo).

(iii) Due matrici sono simili se e soltanto se, per ogni polinomio $p(t)$, le matrici $p(A)$ e $p(A')$ sono simili. In particolare se A ed A' sono simili allora $p(A) = \mathbf{0}$ se e solo se $p(B) = \mathbf{0}$.