

L'algoritmo di Gauss-Jordan.

Per calcolare l'inversa di una matrice A $n \times n$ si puo' procedere come segue. Si affianca alla matrice A la matrice unitaria I

$$(1) \quad [A | I].$$

Si ottiene cosi' una matrice con n righe e $2n$ colonne. Ora si riduce a scala la matrice in (1) con l'algoritmo di Gauss (cioe' con operazioni elementari), pervenendo ad una matrice intermedia (2). Poi con operazioni di tipo $e_i(k)$ si rendono uguali ad 1 tutti i pivots della matrice ridotta a scala (2). Si perviene cosi' ad una nuova matrice (3). Poi, *partendo dall'ultima riga*, con operazioni di tipo $e_{ij}(k)$, si annullano tutte le componenti al di sopra dei pivots. In conclusione si arriva ad una matrice del tipo

$$(4) \quad [I | E].$$

La matrice E che appare in (4) e' l'inversa cercata, cioe' $E = A^{-1}$.

Questo procedimento e' noto in letteratura come *algoritmo di Gauss-Jordan*.

Esempio. Andiamo a calcolare l'inversa della matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si parte dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{32}(\frac{1}{2})$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Poi si rendono uguali ad 1 i pivots delle righe con le operazioni $e_2(-\frac{1}{2})$ ed $e_3(2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Infine si annullano tutte le componenti sopra i pivots partendo dall'ultima riga con le operazioni $e_{23}(-\frac{1}{2})$ ed $e_{12}(-2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

L'inversa di A e' la matrice

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$