Geometria 3 (7 CFU), Matematica, I appello, 20 gennaio 2014 (V. Di Gennaro).

Esercizio 1. *Sia S uno spazio topologico qualunque, $\sim$ una relazione di equivalenza definita in S, ed $S/\sim$ lo spazio quoziente. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $S/\sim$ e' connesso allora lo e' anche S.

(b) Se S e' connesso allora lo e' anche $S/\sim$.

(c) Se ogni classe di equivalenza in S e' connessa allora anche S e' connesso.

(d) Se $S/\sim$ e' connesso e se ogni classe di equivalenza in S e' connessa allora anche S e' connesso.

Svolgimento. Se scegliamo la relazione di equivalenza che identifica tra loro tutti i punti di S, allora lo spazio quoziente e' costituito da un solo punto, percio' e' connesso, mentre S potrebbe non esserlo. Percio' la proprieta' (a) e' falsa. Similmente, se scegliamo la relazione di equivalenza che identifica ogni punto solo con se stesso, allora ogni classe e' connessa, mentre S potrebbe non esserlo. Percio' anche (c) e' falsa. La (b) e' vera perche' l'immagine di un connesso tramite una funzione continua e' un connesso. Anche la (d) e' vera. Infatti, assumiamo che S sia l'unione di due aperti disgiunti A e B. Poiche' le classi di equivalenza sono connesse, allora A e B devono essere unioni di classi di equivalenza. Ne consegue che $S/\sim$ e' l'unione disgiunta di $p(A)$ e di $p(B)$ ($p : S \to S/\sim$ denota la proiezione canonica), e percio' $p^{-1}p(A) = A$ e $p^{-1}p(B) = B$. Allora $p(A)$ e $p(B)$ sono aperti in $S/\sim$, e poiche' $S/\sim$ e' connesso, uno dei due, per esempio $p(A)$, deve essere uguale ad $S/\sim$. Allora $A = S$, e cio' prova che S e' connesso.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto (b) e (d). ■

Esercizio 2. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici qualsiasi. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se f e' continua allora per ogni sottoinsieme Z di X si ha $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$.

(b) Se per ogni sottoinsieme Z di X si ha $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$, allora f e' continua.

(c) Se f e' continua allora per ogni sottoinsieme Z di X si ha $\overline{f(Z)} \subseteq f(\overline{Z})$.

(d) Se per ogni sottoinsieme Z di X si ha $\overline{f(Z)} \subseteq f(\overline{Z})$, allora f e' continua.

Svolgimento. Supponiamo innanzitutto f continua. Per ogni Z poniamo $C := \overline{f(Z)}$. Poiche' f e' continua, allora $f^{-1}(C)$ e' un chiuso. Poiche' tale chiuso contiene Z, allora $\overline{Z} \subseteq f^{-1}(C)$, percio' $f(\overline{Z}) \subseteq C = \overline{f(Z)}$, e cio' prova che (a) e' vera. Anche (b) e' vera: infatti sia C un chiuso di Y, e poniamo $Z = f^{-1}(C)$. Per ipotesi sappiamo che $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$, percio' $\overline{f^{-1}(C)} = \overline{Z} \subseteq f^{-1}(\overline{f(Z)}) \subseteq f^{-1}(C)$. Quindi $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$, e dunque f e' continua. Invece (c) e' falsa. Infatti se $f(X)$ non e' chiuso (e ci sono funzioni continue per cui cio' accade, ad esempio l'applicazione $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$) allora $\overline{f(X)}$ non puo' essere contenuta in $f(X) = f(\overline{X})$. Infine, allo scopo di provare che anche (d) e' falsa, consideriamo un insieme X con almeno due elementi, e l'applicazione identica $\mathrm{id}_X : X \to X$. Se in partenza consideriamo la topologia banale, ed in arrivo quella discreta, allora id_X non e' continua, pero' e' vero che per ogni sottoinsieme Z di X si ha $\overline{f(Z)} \subseteq f(\overline{Z})$ poiche' (se Z non e' vuoto) $\overline{Z} = X$, e $\overline{f(Z)} = f(Z)$.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto (a) e (b). ■

Esercizio 3. *Sia X lo spazio topologico con sostegno $\mathbf{R}$ e topologia data dalle semirette sinistre aperte. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' compatto.

(b) Ogni punto di X ammette un intorno compatto.

(c) La compattificazione di Alexandroff X^{∞} di X e' di Hausdorff.

(d) Il punto $\infty \in X^{\infty}$ ammette solo un intorno.

Svolgimento. La famiglia $\{(-\infty, n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ e' un ricoprimento aperto di X che non ammette un sottoricoprimento finito, percio' (a) e' falsa. Sia ora $x \in X$ un punto qualsiasi, consideriamone l'intorno $I = (-\infty, x+1]$, e sia $\{A_j\}_{j\in J}$ una famiglia di aperti di X che ricopre I. Per qualche $j_0 \in J$, il punto $x+1$ appartiene ad A_{j_0}. Poiche' A_{j_0} e' della forma $(-\infty, a_{j_0})$, ne segue che I e' contenuto in A_{j_0}, e percio' (b) e' vera. Ora andiamo a provare che (d) e' vera. Sia I un intorno di ∞. Allora I contiene un aperto V di X con complementare compatto. L'aperto V e' una semiretta sinistra aperta. Percio', se V e' del tipo $V = (-\infty, a)$, con $a \in \mathbf{R}$, allora il complementare di V e' $[a, +\infty)$ che non e' compatto (il ricoprimento $\{(-\infty, n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ non ammette un sottoricoprimento finito). Ne segue che V deve essere tutto $\mathbf{R}$, quindi $I = X^\infty$, e dunque e' unico. Dal fatto che (d) sia vera deduciamo che (c) e' falsa.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto (b) e (d). ■

Esercizio 4. *Si consideri l'omeomorfismo $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ definito ponendo $f(z) := 5z$. Sia $G = \{f^n : n \in \mathbf{Z}\}$ il gruppo generato da f per composizione. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Lo spazio delle orbite $\mathbf{C}^*/G$ ammette $\mathbf{C}$ come rivestimento universale.

(b) Esiste una mappa di rivestimento $\mathbf{C}^*/G \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$.

(c) Esiste una mappa di rivestimento $\mathbf{C}^*/G \to S^1$.

(d) L'intervallo $[0,1]$ e' un quoziente di $\mathbf{C}^*/G$.

Svolgimento. L'omeomorfismo

$$z \in \mathbf{C}^* \to \left(\frac{z}{\|z\|}, log_5\|z\|\right) \in S^1 \times \mathbf{R}$$

induce un omeomorfismo

$$\mathbf{C}^*/G \cong S^1/\{1\} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z},$$

dove l'azione di $\mathbf{Z}$ e' data per traslazione. Si deduce che $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo al toro $T \cong S^1 \times S^1$, che e' rivestito da $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ tramite il prodotto della mappa esponenziale $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to S^1 \times S^1$. Quindi (a) e' vera. L'affermazione (b) e' falsa, perche' altrimenti il gruppo fondamentale del toro sarebbe finito. Anche (c) e' falsa, perche' altrimenti $\mathbf{R}^2$ sarebbe omeomorfo ad $\mathbf{R}$. Infine (d) e' vera perche' possiamo proiettare T sul primo fattore S^1, e proiettare a sua volta S^1 sull'intervallo $[-1,1]$ per proiezione ortogonale. Si ottiene cosi' una mappa continua e suriettiva $q : T \to [-1,1] \cong [0,1]$, e la topologia naturale di $[-1,1]$ e' quella quoziente, perche' q e' anche chiusa, in quanto mappa continua tra spazi di Hausdorff compatti.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto (a) e (d). ■

Esercizio 5. *Sia $f : S^1 \to S^1$ un'applicazione continua. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'applicazione f ammette sempre un punto fisso.

(b) Se l'applicazione f e' omotopicamente equivalente ad una funzione costante, allora ammette un punto fisso.

(c) Se f ammette un punto fisso allora e' omotopicamente equivalente ad una funzione costante.

Svolgimento. Una qualunque rotazione (di angolo diverso da 0 e π) induce una mappa continua di S^1 in se' priva di punti fissi. Percio' (a) e' falsa. Se invece f e' anche omotopicamente equivalente ad una funzione costante, allora sappiamo che si estende ad una mappa continua $g : D^2 \to S^1$. Sia $jg : D^2 \to D^2$ la composizione con l'inclusione $j : S^1 \to D^2$. Sappiamo che jg ammette un punto fisso (Teorema di Brouwer), cioe' esiste $p \in D^2$ tale che $jg(p) = p$, da cui $p \in S^1$, e $f(p) = p$. Percio' (b) e' vera. Infine (c) e' falsa perche' l'applicazione identica di S^1 non puo' essere omotopicamente equivalente ad una funzione costante, altrimenti S^1 sarebbe un retratto di D^2.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, II appello, 17 Febbraio 2014 (V. Di Gennaro).

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$X := \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,:\, (x, y) \neq (0, 0)\}, \qquad Y := X \cup \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) X e' connesso per cammini.

(b) X e' semplicemente connesso.

(c) X e' convesso.

(d) Y e' connesso per cammini.

(e) Y e' semplicemente connesso.

(f) Y e' convesso.

Svolgimento. Tramite l'identificazione $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, il sottospazio X corrisponde ad $(\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}) \times \mathbf{R}^2$. Entrambi i fattori sono connessi per cammini, percio' anche X lo e'. Invece X non e' semplicemente connesso, perche' non lo e' $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ (che si retrae su S^1), dunque non puo' nemmeno essere convesso. Per quel che riguarda Y, osserviamo che e' *stellato* di centro $O := (0, 0, 0, 0)$. Cioe', per ogni $P := \mathbf{x} := (x, y, z, t) \in Y$, il segmento $\overrightarrow{OP}$ e' tutto contenuto in Y. Infatti, per ogni $s \in [0, 1]$, il punto $Q(s) = s(x, y, z, t)$ sta in Y. Percio' l'omotopia $F : Y \times I \to Y$ definita ponendo $F(\mathbf{x}, s) := s\mathbf{x}$ e' ben posta, e mostra che Y e' contraibile, dunque connesso per cammini e semplicemente connesso. Infine osserviamo che Y non e' convesso. Infatti i punti $A := (-1, -1, 1, 1)$ e $B := (1, 1, 1, 1)$ stanno in Y, ma il punto medio $M := (0, 0, 1, 1)$ del segmento $\overrightarrow{AB}$ no.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto (a), (d) ed (e). ■

Esercizio 2. *Sia S uno spazio topologico qualsiasi, e si denoti con $\sim$ la relazione di equivalenza in S che identifica due punti se appartengono ad uno stesso sottospazio connesso di S. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $S/\sim$ ha la topologia discreta.

(b) $S/\sim$ e' totalmente sconnesso (cioe' gli unici sottospazi di $S/\sim$ connessi, a parte il vuoto, sono i punti).

(c) $S/\sim$ e' connesso.

(d) $S/\sim$ e' semplicemente connesso.

Svolgimento. Sia $S = \mathbf{Q}$, con la topologia naturale. Un sottospazio connesso di $\mathbf{Q}$ deve essere un intervallo in $\mathbf{R}$, percio' puo' essere costituito soltanto da un punto. Cio' significa che in tal caso $x \sim y$ se e solo se $x = y$. Quindi $\mathbf{Q}/\sim$ e' omeomorfo a $\mathbf{Q}$. Questo esempio mostra che le proprieta' (a), (c) e (d) sono false. Invece (b) e' vera. Per provare cio', sia $\Gamma \subseteq S/\sim$ una componente connessa. Andiamo a provare che Γ e' costituita solo da un punto. Per provare cio' sara' sufficiente provare che $p^{-1}(\Gamma)$ e' connesso in S (qui $p : S \to S/\sim$ denota la proiezione canonica). Supponiamo che $p^{-1}(\Gamma) = A \cup B$ sia l'unione disgiunta di due chiusi di S, A e B (si osservi che $p^{-1}(\Gamma)$ e' chiuso in S perche' Γ, in quanto componente connessa, e' un chiuso in $S/\sim$). Poiche' le classi di equivalenza di S sono connesse, allora A e B sono unioni di classi di equivalenza. Percio' $\Gamma = pp^{-1}(\Gamma)$ e' unione disgiunta di $p(A)$ e $p(B)$. Ne consegue che $p^{-1}p(A) = A$ e $p^{-1}p(B) = B$, per cui $p(A)$ e $p(B)$ sono chiusi in $S/\sim$. Poiche' Γ e' connesso, allora $\Gamma = p(A)$ oppure $\Gamma = p(B)$. Allora $p^{-1}(\Gamma) = A$ oppure $p^{-1}(\Gamma) = B$. Cio' prova che $p^{-1}(\Gamma)$ e' connesso in S, e che la (b) e' vera.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^3$*:* $X := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^2\}$, $\quad Y := \{(x, y, z) \in X \,:\, 0 \leq z \leq 1\}$, $\quad Z := \{(x, y, z) \in X \,:\, 0 \leq z < 1\}$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' una varieta' di dimensione 2.

(b) Y e' una varieta' di dimensione 2.

(c) Z e' una varieta' di dimensione 2.

Svolgimento. X e' un cono a due falde, con il vertice nell'origine O. Sia U un qualunque intorno aperto di O su X. Poiche' $U\backslash\{O\}$ e' sconnesso, allora U non puo' essere omeomeorfo ad un disco aperto del piano. Quindi (a) e' falsa. Per le altre affermazioni, osserviamo che la proiezione ortogonale sul piano x, y induce un omeomorfismo $p : (x, y, z) \in Y \to (x, y) \in D^2$ (la mappa inversa e' data dalla funzione $(x, y) \in D^2 \to (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \in Y$). L'omeomorfismo p porta Z nel disco aperto B^2, percio' (c) e' vera. Invece (b) e' falsa perche' D^2 non e' una varieta' di dimensione 2. Infatti, sia P un punto di S^1, ed U l'intersezione di D^2 con un disco aperto di centro P. Se D^2 fosse una varieta' allora U sarebbe omeomorfo ad un aperto del piano. Ma $U\backslash\{P\}$ e' convesso, mentre un aperto del piano privato di un punto si retrae su una circonferenza, e percio' non puo' essere omeomorfo a $U\backslash\{P\}$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). $\blacksquare$

Esercizio 4. *Sia T il toro. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Esiste un gruppo G che agisce su T in modo propriamente discontinuo, e tale che T/G sia omeomorfo ad S^1.

(b) Esiste un gruppo G che agisce su T in modo propriamente discontinuo, e tale che T/G sia omeomorfo ad $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

(c) Esiste un gruppo G che agisce su T in modo propriamente discontinuo, e tale che T/G sia omeomorfo all'intervallo $[0, 1]$.

Svolgimento. Sia $p : T \to T/G$ la proiezione canonica. Poiche' l'azione di G e' propriamente discontinua, sappiamo che p e' un rivestimento, percio' il gruppo fondamentale di T e' isomorfo ad un sottogruppo del gruppo fondamentale di T/G. Tenuto conto che il gruppo fondamentale del toro e' isomorfo a $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, che quello di S^1 e' isomorfo a $\mathbf{Z}$, e che $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e $[0, 1]$ sono contraibili, ne segue che tutte e tre le affermazioni sono false.

In conclusione, le affermazioni sono tutte false. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Sia X uno spazio topologico, ed X^∞ la sua compattificazione di Alexandroff. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La chiusura di X in X^∞ e' X^∞.

(b) Se X^∞ e' di Hausdorff allora anche X lo e'.

(c) Se X e' di Hausdorff allora anche X^∞ lo e'.

Svolgimento. Se X e' compatto, allora $\{\infty\}$ e' aperto in X^∞, e percio' in tal caso $X = \overline{X}$, e la (a) e' falsa. Infatti $\{\infty\} = \{\infty\} \cup \emptyset$, e l'insieme vuoto e' un aperto in X con complementare compatto. La (b) e' vera, perche' sottospazi di uno spazio di Hausdorff sono ancora di Hausdorff. Invece la (c) e' falsa, perche' se $X = \mathbf{Q}$, con la topologia naturale, allora X^∞ non e' di Hausdorff. Infatti siano U e $\{\infty\} \cup (V \cap \mathbf{Q})$ due qualunque intorni aperti in X^∞, rispettivamente di 0 e di ∞, con V aperto in $\mathbf{R}$ tale che $\mathbf{Q}\backslash V$ sia compatto. Se tali intorni fossero disgiunti, allora U sarebbe contenuto in $\mathbf{Q}\backslash V$, e dunque anche la chiusura $\overline{U}_{\mathbf{R}}$ in $\mathbf{R}$ di U sarebbe contenuta in $\overline{\mathbf{Q}\backslash V}_{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}\backslash V$. Percio' $\mathbf{Q}$ conterrebbe $\overline{U}_{\mathbf{R}}$, che a sua volta contiene un intervallo chiuso di $\mathbf{R}$ del tipo $[-\epsilon, \epsilon]$, con $\epsilon > 0$. Quindi si avrebbe $[-\epsilon, \epsilon] \subseteq \mathbf{Q}$, il che e' assurdo.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). $\blacksquare$

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, III appello, 2 Luglio 2014 (V. Di Gennaro).

Esercizio 1. *Siano X ed Y spazi topologici, si assuma Y compatto. Sia $X \times Y$ il prodotto topologico, e siano $p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$ le proiezioni canoniche. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) p_X e' aperta.

(b) p_X e' chiusa.

(c) p_Y e' aperta.

(d) p_Y e' chiusa.

Svolgimento. Sia A un aperto di $X \times Y$. Allora, per opportune famiglie di aperti di X ed Y, $\{U_i\}_{i\in I}$ e $\{V_i\}_{i\in I}$, si ha:

$$A = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i.$$

Quindi $p_X(A) = \bigcup_{i\in I} U_i$ e $p_Y(A) = \bigcup_{i\in I} V_i$. Cio' prova che entrambe le proiezioni sono aperte (senza alcuna ipotesi su Y). Quindi (a) e (c) sono vere. In generale non e' detto che le proiezioni siano chiuse. Ad esempio, in $\mathbf{R}\times[-1,1]$, consideriamo il chiuso $C = \{(x,y) : xy = 1\}$. La sua immagine tramite $p_{[-1,1]}$ e' $[-1,1]\backslash\{0\}$, che non e' un chiuso in $[-1,1]$. Dunque (d) e' falsa. Pero', se Y e' compatto, allora p_X e' chiusa. Infatti, sia C un chiuso in $X \times Y$, ed $x \in X\backslash p_X(C)$. Per ogni $y \in Y$ si ha $(x,y) \notin C$, percio' per ogni $y \in Y$ esiste un intorno $U^{(y)}$ di x in X, ed un intorno $V^{(y)}$ di y in Y tali che $U^{(y)}\times V^{(y)} \subseteq (X\times Y)\backslash C$. Poiche' Y e' compatto potremo ricoprire Y con un numero finito di $V^{(y)}$, cioe' esistono $y_1, \dots, y_n$ in Y tali che $Y = V^{(y_1)} \cup V^{(y_2)} \cup \dots \cup V^{(y_n)}$. Allora $U := U^{(y_1)} \cap U^{(y_2)} \cap \dots \cap U^{(y_n)}$ e' un intorno aperto di x in X disgiunto da $p_X(C)$ (se $a \in U \cap p_X(C)$ allora esiste $b \in Y$ tale che $(a,b) \in C$; ma per qualche i deve essere $b \in V^{(y_i)}$, quindi $(a,b) \in U^{(y_i)} \times V^{(y_i)} \subseteq (X \times Y)\backslash C$, e cio' e' assurdo). Cio' prova che $X\backslash p_X(C)$ e' aperto, cioe' che $p_X(C)$ e' chiuso in X.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b), e (c). ■

Esercizio 2. *Sia $A \subseteq X$ un retratto di uno spazio topologico X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) A e' un retratto di deformazione di X.

(b) Se X e' contraibile, lo e' anche A.

(c) Se $B \subseteq X$ e' un sottospazio con $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cap B$ e' un retratto di B.

(d) Se ogni funzione continua $X \to X$ ha almeno un punto fisso, allora anche ogni funzione continua $A \to A$ ha almeno un punto fisso.

Svolgimento. Se A e' un punto di X, allora A e' un retratto di X, ma in generale non e' detto sia anche un retratto di deformazione: cio' implicherebbe X contraibile. Dunque (a) e' falsa. Supponiamo ora che X sia contraibile, e sia $r : X \to A$ una retrazione di X su A, ed $i : A \to X$ l'inclusione. Poiche' r e' una retrazione, allora $ri = \mathrm{id}_A$. D'altra parte, poiche' X e' contraibile, allora tutte le funzioni continue $X \to X$ sono omotopicamente equivalenti, percio' $ir \simeq \mathrm{id}_X$. Dunque A e' omotopicamente equivalente ad X, e, per transitivita', e' contraibile. Cio' prova che (b) e' vera. Invece (c) e' falsa. Supponiamo infatti $X = \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $A = S^1$, e sia $B \subset X$ una retta che incontra S^1 in due punti distinti. Allora $A \cap B$ non e' connesso, e percio' non puo' essere un retratto di B. Infine andiamo a provare che (d) e' vera. A tale proposito, sia $f : A \to A$ una funzione continua. Allora $ifr : X \to X$ deve avere un punto fisso x. Poiche' $x = i(f(r(x)))$, segue che $x \in A$ e $x = f(x)$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (d). ■

Esercizio 3. *Sia X lo spazio topologico con sostegno dato dall'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$, munito della topologia naturale. Sia Y lo spazio con sostegno $\mathbf{R}$, munito della topologia delle semirette sinistre aperte (cioe' gli aperti sono il vuoto, $\mathbf{R}$, e gli intervalli del tipo $(-\infty, x)$, $x \in \mathbf{R}$). Sia Z lo spazio con sostegno*

R, *munito della topologia di Sorgenfrey (cioe' $U \subseteq \mathbf{R}$ e' aperto se e solo se per ogni $x \in U$ esiste $y > x$ tale che $[x, y) \subseteq U$). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Ogni funzione continua $f : Y \to X$ e' costante.

(b) Ogni funzione continua $f : X \to Y$ e' costante.

(c) Ogni funzione continua $f : Z \to Y$ e' costante.

(d) Ogni funzione continua $f : Y \to Z$ e' costante.

Svolgimento. Sia $f : Y \to X$ una funzione continua, e per assurdo supponiamo che esistano $a, b \in Y$ per cui $f(a) \neq f(b)$. Poiche' X e' di Hausdorff, allora esistono aperti disgiunti U e V in X, con $f(a) \in U$ ed $f(b) \in V$. Poiche' $U \cap V = \emptyset$ allora $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Ma f e' continua, percio' $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono due aperti non vuoti disgiunti in Y: nella topologia delle semirette sinistre aperte cio' e' impossibile, dunque (a) e' vera. Invece (b) e' falsa: infatti l'applicazione identica $x \in X \to x \in Y$ e' continua in quanto ogni aperto di Y e' anche aperto in X. Per lo stesso motivo l'applicazione $x \in Z \to x \in Y$ e' continua. Infatti per ogni $x \in \mathbf{R}$ possiamo scrivere

$$(-\infty, x) = \bigcup_{y \in \mathbf{R}} [y, x),$$

il che prova che ogni aperto di Y e' anche aperto in Z. Quindi (c) e' falsa. Mentre, tenuto conto che anche Z e' di Hausdorff, con un argomento simile alla dimostrazione di (a), si vede che anche (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (d). ■

Esercizio 4. *Sia X il sottospazio di* **R** *costituito dalla seguente unione:* $[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup [6, 7]$. *Sia Y lo spazio quoziente di X ottenuto identificando i punti* $0, 2, 4, 6$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Y e' omeomorfo ad S^1.

(b) Y e' omeomorfo a D^2.

(c) Y e' omeomorfo ad un retratto di deformazione di D^2.

(d) Y e' semplicemente connesso.

Svolgimento. Sia $Z := [-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \subset D^2$. Andiamo a provare che Z e' omeomorfo ad Y. Innanzitutto consideriamo gli omeomorfismi $f_1 : t \in [0, 1] \to (t, 0) \in [0, 1] \times \{0\}$, $f_2 : t \in [2, 3] \to (0, t - 2) \in \{0\} \times [0, 1]$, $f_3 : t \in [4, 5] \to (4 - t, 0) \in [-1, 0] \times \{0\}$, $f_4 : t \in [6, 7] \to (0, 6 - t) \in \{0\} \times [-1, 0]$. Tali applicazioni si incollano ad una applicazione continua e suriettiva $f : X \to Z$. La relazione indotta da f su X coincide con quella che definisce Y. Percio' f passa al quoziente, ed induce un'applicazione continua e biiettiva $\widetilde{f} : Y \to Z$. Tale mappa e' bicontinua perche' Y e' compatto e Z e' di Hausdorff. Premesso cio', osserviamo che Z, privato dell'origine, si decompone in 4 componenti connesse. Percio' Z, e quindi anche Y, non puo' essere omeomorfo ne' ad S^1 ne' a D^2.

Pero' Z e' un retratto di deformazione di D^2. Per provare cio', consideriamo prima la parte di D^2 compresa nel primo quadrante: $A_1 = \{(x, y) \in D^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Ed andiamo a provare che $A_1 \cap Z$ e' un retratto di deformazione di A_1. Per costruire tale retrazione possiamo fare cosi': quando $x_0 \geq y_0$ consideriamo la proiezione di (x_0, y_0) sull'asse x secondo la direzione $y = x$, cioe' l'intersezione della retta $y - y_0 = x - x_0$ con $y = 0$; quando $x_0 \leq y_0$ consideriamo la proiezione di (x_0, y_0) sull'asse y, sempre secondo la direzione $y = x$. Nel primo caso si ottiene il punto $(x_0 - y_0, 0) \in A_1 \cap Z$, nel secondo $(0, y_0 - x_0) \in A_1 \cap Z$. L'applicazione

$$r_1 : (x_0, y_0) \in A_1 \to \begin{cases} (x_0 - y_0, 0) & \text{se } x_0 \geq y_0 \\ (0, y_0 - x_0) & \text{se } x_0 \leq y_0 \end{cases} \in A_1 \cap Z$$

e' una retrazione di A_1 su $A_1 \cap Z$. Ora andiamo a provare che, componendo r_1 con l'inclusione $i_1 : A_1 \cap Z \hookrightarrow A_1$, si ottiene una funzione omotopicamente equivalente alla mappa identica di A_1. Per fare cio', possiamo considerare l'applicazione φ_1 che ad ogni punto $((x_0, y_0), t) \in A_1 \times I$ associa, quando $x_0 \geq y_0$, il punto del segmento di estremi $(x_0 - y_0, 0)$ e (x_0, y_0) di coordinate $(x_0 - y_0, 0) + t((x_0, y_0) - (x_0 - y_0, 0))$, e che associa, nel secondo caso, il punto del segmento di estremi $(0, y_0 - x_0)$ e (x_0, y_0) di coordinate $(0, y_0 - x_0) + t((x_0, y_0) - (0, y_0 - x_0))$. In altre parole, l'applicazione $\varphi_1 : A_1 \times I \to A_1$ e' tale che

$$\varphi_1((x_0, y_0), t) = \begin{cases} (x_0 - y_0, 0) + t(y_0, y_0) & \text{se } x_0 \geq y_0 \\ (0, y_0 - x_0) + t(x_0, x_0) & \text{se } x_0 \leq y_0. \end{cases}$$

Tale funzione e' un'omotopia tra $i_1 r_1$ e la mappa identica di A_1. Procedendo in modo simile per gli altri quadranti (utilizzando sempre la direzione di proiezione $y = x$ nel terzo quadrante, e la direzione $y = -x$ negli altri), si possono costruire retrazioni $r_i : A_i \to A_i \cap Z$, $i = 1, 2, 3, 4$, che si incollano ad un'unica retrazione $r : D^2 \to Z$, da cui si deduce, come prima, che Z e' un retratto di deformazione di D^2. Poiche' Z e' un retratto di deformazione di D^2, allora e' anche semplicemente connesso.

In conclusione, le affermazioni vere sono (c) e (d). ■

Esercizio 5. *Si consideri l'azione di $\mathbf{Z}_2$ su $\mathbf{R}$ definita ponendo $\pm 1 \cdot x = \pm x$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ e' compatto.

(b) $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ e' di Hausdorff.

(c) L'azione e' propriamente discontinua.

(d) La proiezione canonica $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ e' il rivestimento universale di $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$.

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ e' omeomorfo a $[0, +\infty)$. Infatti l'applicazione valore assoluto $x \in \mathbf{R} \to |x| \in [0, +\infty)$ e' suriettiva, continua, aperta, ed induce su $\mathbf{R}$ la stessa relazione di equivalenza indotta dall'azione di $\mathbf{Z}_2$. Poiche' $[0, +\infty)$ non e' compatto, ed e' di Hausdorff, si deduce che (a) e' falsa, mentre (b) e' vera. Osserviamo poi che le fibre $p^{-1}([x])$ della proiezione canonica sono formate da due punti se $x \neq 0$, e solo dal punto $\{0\}$ se $x = 0$. Percio' p non puo' essere un rivestimento, quindi (c) e (d) sono false.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, IV appello, 9 Settembre 2014 (V. Di Gennaro).

Esercizio 1. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici. Si assuma che Y sia separato, e che ogni punto di Y possieda un intorno compatto. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se f e' continua e se, per ogni compatto K di Y, $f^{-1}(K)$ e' compatto, allora f e' chiusa.

(b) Se f e' continua e chiusa, allora, per ogni compatto K di Y, $f^{-1}(K)$ e' compatto.

(c) Se f e' chiusa e se, per ogni compatto K di Y, $f^{-1}(K)$ e' compatto, allora f e' continua.

(d) Se f e' continua, allora f e' chiusa, e, per ogni compatto K di Y, $f^{-1}(K)$ e' compatto.

Svolgimento. Supponiamo innanzitutto che f sia continua e che, per ogni compatto K di Y, $f^{-1}(K)$ sia compatto. Andiamo a provare che f e' chiusa. Sia C un chiuso di X, e sia y un punto di Y non appartenente ad $f(C)$. Sia K un intorno compatto di y. Abbiamo $f(C \cap f^{-1}(K)) = f(C) \cap K$. Poiche' $C \cap f^{-1}(K)$ e' un chiuso del compatto $f^{-1}(K)$, allora $C \cap f^{-1}(K)$ e' compatto. Poiche' f e' continua, allora anche $f(C \cap f^{-1}(K)) = f(C) \cap K$ e' un compatto, dunque un chiuso perche' Y e' separato. Poiche' $f(C) \cap K$ e' chiuso, allora $K \backslash f(C)$ e' un intorno aperto di y disgiunto da $f(C)$. Cio' prova che $Y \backslash f(C)$ e' intorno di ogni suo punto, dunque e' aperto, ed $f(C)$ e' un chiuso. Percio' (a) e' vera. Le rimanenti affermazioni sono false. Infatti sia X uno spazio non compatto, ed $f : X \to Y := \mathbf{R}$ l'applicazione costante $f(x) \equiv 0$. Allora f e' continua e chiusa, ma $f^{-1}(\{0\}) = X$ non e' compatto. Cio' prova che (b) e' falsa. Per la (c), consideriamo l'applicazione $f : S^1 \to [0, 1)$ inversa dell'applicazione continua $g : [0, 1) \to S^1$ definita ponendo $g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. La funzione f e' chiusa perche' $f(C) = g^{-1}(C)$ e g e' continua. Inoltre se K e' un compatto di $[0, 1)$, allora $f^{-1}(K) = g(K)$ e' un compatto perche' g e' continua. Ma f non e' continua perche' S^1 non e' omeomorfo a $[0, 1)$. Anche la (d) e' falsa, perche' una funzione continua non e' detto sia chiusa (ad esempio si puo' prendere l'inclusione $f : X \subset Y$ di un sottoinsieme non chiuso di Y).

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 2. *Sia X uno spazio topologico, ed $f : X \to S^1$ un'applicazione continua. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $X = \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, allora esiste un'applicazione continua $g : X \to \mathbf{R}$ tale che, per ogni $x \in X$, si ha $f(x) = (\cos(2\pi g(x)), \sin(2\pi g(x)))$.

(b) Se $X = S^2$, allora esiste un'applicazione continua $g : X \to \mathbf{R}$ tale che, per ogni $x \in X$, si ha $f(x) = (\cos(2\pi g(x)), \sin(2\pi g(x)))$.

(c) Se $X = \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, allora esiste un'applicazione continua $g : X \to \mathbf{R}$ tale che, per ogni $x \in X$, si ha $f(x) = (\cos(2\pi g(x)), \sin(2\pi g(x)))$.

(d) Se X e' il toro, allora esiste un'applicazione continua $g : X \to \mathbf{R}$ tale che, per ogni $x \in X$, si ha $f(x) = (\cos(2\pi g(x)), \sin(2\pi g(x)))$.

Svolgimento. Sia $e : \mathbf{R} \to S^1$ la mappa esponenziale. Per il Teorema di esistenza del sollevamento, sappiamo che g esiste se e soltanto se, fissato un punto $x_0 \in X$, si ha $f_*(\pi(X, x_0)) = \{0\}$ ($\subseteq \pi(S^1, f(x_0)) \cong \mathbf{Z}$). Se $X = \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, ed f e' un omeomorfismo, cio' e' impossibile, perche' $\pi(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$. Percio' (a) e' falsa. Anche (d) lo e', perche' se f e' la proiezione sul primo fattore $f : X \cong S^1 \times S^1 \to S^1$, allora $f_*(\pi(X, x_0)) = \mathbf{Z}$. Invece (b) e (c) sono vere, (b) perche' S^2 e' semplicemente connesso, e (c) perche' $\pi(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}, x_0) \cong \mathbf{Z}_2$, e dunque deve avere immagine banale in $\mathbf{Z}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (c). ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{A}$ la topologia per $\mathbf{R}$ definita ponendo $A \in \mathcal{A}$ se e solo se $A = \mathbf{R}$, oppure $0 \notin A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ e' uno spazio compatto.

(b) $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ e' uno spazio connesso.

(c) $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ *e' di Hausdorff.*

(d) $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ *e' uno spazio connesso per cammini.*

(e) Ogni funzione continua $f : (\mathbf{R}, nat) \to (\mathbf{R}, \mathcal{A})$ *e' costante.*

Svolgimento. In un ricoprimento aperto di $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ ci deve essere un aperto passante per 0. Ma l'unico aperto siffatto e' $\mathbf{R}$, percio' $\mathbf{R}$ deve far parte del ricoprimento. Cio' implica che $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ e' compatto. E' anche connesso, perche' se due aperti si riuniscono in $\mathbf{R}$, uno dei due, dovendo passare per 0, deve essere $\mathbf{R}$. Invece non e' di Hausdorff, perche' ogni intorno di 0 deve essere tutto $\mathbf{R}$. Andiamo a provare che $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ e' connesso per cammini. A tale proposito, sia $x \in \mathbf{R}$ un qualunque elemento, e consideriamo l'applicazione $g : [0, 1] \to (\mathbf{R}, \mathcal{A})$ definita ponendo $g(0) = 0$, e $g(t) = x$ per $t \neq 0$. Tale appilcazione e' continua. Infatti, sia A un aperto in $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$. Se $A = \mathbf{R}$, allora $g^{-1}(A) = [0, 1]$, che e' un aperto in $[0, 1]$. Se A non e' $\mathbf{R}$, allora $0 \notin A$, percio' $g^{-1}(A) = \emptyset$ oppure $g^{-1}(A) = (0, 1]$: in entrambi i casi $g^{-1}(A)$ e' un aperto. Dunque g e' un cammino che congiunge 0 con x, percio' (d) e' vera. Con un argomento simile si vede che esistono funzioni continue non costanti: ad esempio la funzione $f : (\mathbf{R}, nat) \to (\mathbf{R}, \mathcal{A})$ definita ponendo $f(0) = 0$, e $f(t) = 1$ per $t \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (d). ■

Esercizio 4. *Si consideri l'omeomorfismo* $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ *definito ponendo* $f(z) = \overline{z}$*, e sia* G *il gruppo formato da* f *e da* $id_{\mathbf{C}^*}$*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'azione di G *su* $\mathbf{C}^*$ *e' propriamente discontinua.*

(b) $\mathbf{C}^*/G$ *e' omeomorfo a* $\mathbf{C}^*$*.*

(c) La proiezione quoziente $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*/G$ *e' un rivestimento.*

Svolgimento. L'omeomorfismo

$$z \in \mathbf{C}^* \to \left(\frac{z}{\|z\|}, \, log \, \|z\| \right) \in S^1 \times \mathbf{R}$$

induce un omeomorfismo

$$\mathbf{C}^*/G \cong S^1/H \times \mathbf{R}/\{1\},$$

dove H e' il gruppo corrispondente alla restrizione di f su S^1. Poiche' f e' la riflessione rispetto all'asse delle x, l'azione di H identifica i punti di S^1 con la stessa ascissa. Ne consegue che la mappa quoziente $S^1 \to S^1/H$ si identifica con la proiezione ortogonale $S^1 \to [-1, 1]$, e percio' $S^1/H \cong [-1, 1]$. Si deduce che $\mathbf{C}^*/G$ e' semplicemente connesso. Possiamo allora dire che (b) e' falsa. Inoltre, la proiezione quoziente $p : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*/G$ non e' un rivestimento, altrimenti $\mathbf{Z} \cong p_*(\pi(\mathbf{C}^*, 1))$ sarebbe contenuto in $\pi(\mathbf{C}^*/G, p(1)) = \{0\}$. In particolare l'azione di G non puo' essere propriamente discontinua (il che si puo' anche provare osservando che la riflessione muta in se' qualunque disco di centro un punto sull'asse delle x).

In conclusione, le affermazioni sono tutte false. ■

Esercizio 5. *Si considerino le applicazioni* $f : x \in \mathbf{R} \to x^2$*, e* $g : x \in \mathbf{R} \to x^3 \in \mathbf{R}$*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) f *e' aperta.*

(b) f *e' chiusa.*

(c) g *e' aperta.*

(d) g *e' chiusa.*

Svolgimento. Cominciamo osservando che g e' un omeomorfismo, perche' possiede come inversa la funzione continua $x \in \mathbf{R} \to \sqrt[3]{x} \in \mathbf{R}$. Percio' g e' aperta e chiusa. Invece f non e' aperta, perche' $f(\mathbf{R}) = [0, +\infty)$. Pero' f e' chiusa. Per provare cio', sia $C \subseteq \mathbf{R}$ un chiuso. Possiamo scrivere C come unione di due chiusi nel seguente modo: $C = (C \cap (-\infty, 0]) \cup (C \cap [0, +\infty))$. Quindi $f(C) = f(C \cap (-\infty, 0]) \cup f(C \cap [0, +\infty))$. Ora $f(C \cap (-\infty, 0]) = h(C \cap (-\infty, 0])$, dove $h : x \in (-\infty, 0] \to x^2 \in [0, +\infty)$. Poiche' h e' un omeomorfismo, allora $h(C \cap (-\infty, 0])$ e' chiuso in $[0, +\infty)$, e percio' e' un chiuso in $\mathbf{R}$. Similmente si prova che $f(C \cap [0, +\infty))$ e' chiuso in $\mathbf{R}$, dunque anche $f(C)$ lo e'.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). $\blacksquare$

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, I appello, 27 Gennaio 2015 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se esiste una funzione continua $\varphi : Y \to X$ tale che $f\varphi = id_Y$, allora la topologia di Y e' quella quoziente.

(b) Se la topologia di Y e' quella quoziente, allora esiste una funzione continua $\varphi : Y \to X$ tale che $f\varphi = id_Y$.

(c) Esiste una funzione continua $\varphi : Y \to X$ tale che $f\varphi = id_Y$ se e solo se la topologia di Y e' quella quoziente.

(d) Se la topologia di Y e' quella quoziente, allora f e' aperta e chiusa.

Svolgimento. Mettiamoci nelle ipotesi dell'affermazione (a), e sia $A \in \mathcal{A}_f$ un aperto della topologia quoziente di Y. Possiamo scrivere $A = {\mathrm{id}_Y}^{-1}(A) = (f\varphi)^{-1}(A) = \varphi^{-1}(f^{-1}(A))$, che e' un aperto della topologia di Y perche' f e φ sono continue. Percio' $\mathcal{A}_f \subseteq \mathcal{A}_Y$, e poiche' l'altra inclusione e' sempre verificata, ne segue che (a) e' vera. Invece (b) e' falsa. Infatti, sia X uno spazio compatto di Hausdorff, $Z \subset X$ un sottoinsieme non chiuso, ed $Y := X/Z$ lo spazio quoziente ottenuto contraendo Z ad un punto. Sia $f : X \to Y$ la proiezione canonica. Se esistesse una funzione continua $\varphi : Y \to X$ tale che $f\varphi = \mathrm{id}_Y$, allora φ indurrebbe, per restrizione, un omeomorfismo tra Y e $\varphi(Y)$, il che e' assurdo in quanto Y non e' di Hausdorff. Poiche' (b) e' falsa allora lo e' anche (c). Anche (d) e' falsa. A tale proposito consideriamo la proiezione $f : (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to x \in \mathbf{R}$. Tale funzione e' suriettiva ed aperta, percio' la topologia naturale di $\mathbf{R}$ coincide con quella quoziente. Ma f non e' chiusa, perche' l'immagine dell'iperbole $C := \{(x, y) : xy = 1\}$ tramite f e' $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 2. *Sia $\mathbf{Z}$ l'insieme dei numeri interi, munito della topologia naturale, e sia X uno spazio topologico qualsiasi. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La topologia naturale di $\mathbf{Z}$ e' discreta.

(b) Se X e' connesso, allora ogni funzione continua $f : X \to \mathbf{Z}$ e' costante.

(c) Se ogni funzione continua $f : X \to \mathbf{Z}$ e' costante, allora X e' connesso.

(d) X e' connesso se e solo se ogni funzione continua $f : X \to \mathbf{Z}$ e' costante.

Svolgimento. Per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha $\{n\} = \mathbf{Z} \cap \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$. Percio' ogni punto di $\mathbf{Z}$ e' aperto, quindi la topologia di $\mathbf{Z}$ e' discreta. In particolare, gli unici sottospazi connessi di $\mathbf{Z}$ sono il vuoto, ed i punti. Quindi l'immagine di uno spazio connesso X tramite una funzione continua $f : X \to \mathbf{Z}$ deve essere un punto, percio' f deve essere costante. Supponiamo ora che X sia non connesso, e sia $X = A_1 \cup A_2$ una decomposizione di X nell'unione disgiunta di dua aperti non vuoti. L'applicazione $f : X \to \mathbf{Z}$ definita ponendo $f(x) = 0$ se $x \in A_1$ e $f(x) = 1$ se $x \in A_2$, e' una funzione ben posta, continua, e non costante. Questo esempio mostra che anche (c) e' vera.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 3. *Siano X ed Y spazi topologici, $A \subseteq X$ un sottoinsieme di X, e $B \subseteq Y$ un sottoinsieme di Y. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(b) $\overline{A \times B} = (\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B})$.

(c) $\partial(A \times B) = \partial A \times \partial B$.

(d) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

Svolgimento. Poiche' $\overline{A} \times \overline{B}$ e' un chiuso in $X \times Y$, contenente $A \times B$, allora $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$. Ma vale anche il viceversa. Infatti sia (x, y) un punto di $\overline{A} \times \overline{B}$, ed $U \subseteq X \times Y$ un intorno di tale punto. Poiche' U contiene un aperto passante per (x, y), allora esiste un intorno U_x di x in X ed un intorno U_y di y in Y tali che $U_x \times U_y$ sia contenuto in U. D'altra parte $x \in \overline{A}$ ed $y \in \overline{B}$, percio' $U_x \cap A$ ed $U_y \cap B$ sono non vuoti, percio' anche $(U_x \times U_y) \cap (A \times B) \neq \emptyset$ e quindi $U \cap (A \times B) \neq \emptyset$, per ogni intorno di (x, y). Cio' equivale a dire che $(x, y) \in \overline{A \times B}$. Dunque (a) e' vera, mentre (b) e' falsa, come mostra il seguente esempio. Posto $A = B = (0, 1) \subset \mathbf{R}$, si ha $(0, 0) \in \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = [0, 1] \times [0, 1]$, ma $(0, 0)$ non appartiene ad $(\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B}) = ([0, 1] \times (0, 1)) \cup ((0, 1) \times [0, 1])$. Lo stesso esempio ci fa capire che anche (c) e' falsa. Infatti $\partial(A \times B)$ e' costituito dai quattro lati che delimitano il quadrato unitario, cioe' $\partial(A \times B) = ([0, 1] \times \{0, 1\}) \cup (\{0, 1\} \times [0, 1])$, mentre $\partial A \times \partial B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Invece (d) e' vera. Infatti:

$$\partial(A \times B) = \left(\overline{A \times B}\right) \cap \left(\overline{X \times Y - A \times B}\right) = \left(\overline{A \times B}\right) \cap \left(\overline{X \times Y - (A \times Y \cap X \times B)}\right)$$

$$= \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) \cap \left(\overline{(X - A) \times Y} \cup \overline{X \times (Y - B)}\right) = \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) \cap \left(\overline{(X - A)} \times Y \cup X \times \overline{(Y - B)}\right)$$

$$= \left((\overline{A} \cap \overline{X - A}) \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times (\overline{B} \cap \overline{Y - B})\right) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B).$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 4. *Siano X ed Y spazi topologici omotopicamente equivalenti. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' compatto allora anche Y e' compatto.

(b) Se X e' di Hausdorff allora anche Y e' di Hausdorff.

(c) Se X e' connesso per cammini allora anche Y e' connesso per cammini.

(d) Se X e' metrizzabile allora anche Y e' metrizzabile.

Svolgimento. Sappiamo che $\mathbf{R}^n$ non e' compatto, ed e' omotopicamente equivalente ad un punto. Percio' (a) e' falsa. Anche (b) e' falsa. Infatti se X e' uno spazio con la topologia banale, allora tutte le funzioni a valori in X sono continue, e percio' X e' contraibile (se x_0 e' un punto di X, la funzione $F : X \times I \to X$ definita ponendo

$$F(x, s) := \begin{cases} x_0 & \text{se } s = 0 \\ x & \text{se } s \in (0, 1] \end{cases}$$

realizza un'equivalenza omotopica tra un'applicazione costante e l'applicazione identica di X). Lo stesso esempio mostra che anche (d) e' falsa. Invece (c) e' vera. Per provare cio', fissiamo un'equivalenza omotopica $f : X \to Y$, con inversa omotopica $g : Y \to X$. Sia $G : Y \times I \to Y$ una omotopia tra fg e l'identita' di Y. Sia $Z \subseteq Y$ una componente connessa per cammini. Per ogni $z \in Z$, la funzione $t \in I \to G(z, t) \in Y$ e' un cammino di estremi $f(g(z))$ e z. Percio' $f(X)$ ha intersezione non vuota con Z. Poiche' $f(X)$ e' connesso per cammini, allora $f(X)$ e' tutto contenuto in Z. Allora abbiamo anche $f(g(Y)) \subseteq f(X) \subseteq Z$. In particolare $G(Y \times \{0\}) \subseteq Z$. Poiche' anche I e' connesso per cammini, se ne deduce che per ogni $y \in Y$ deve essere anche $G(\{y\} \times I) \subseteq Z$. Cioe' per ogni $y \in Y$ ed ogni $t \in I$ si ha $G(y, t) \in Z$, dunque $Y = Z$. Cio' prova che Y ha una unica componente connessa per cammini, cioe' che Y e' connesso per cammini.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 5. *Si consideri l'omeomorfismo $f : \mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ definito ponendo $f(x, y) := (-x, -y)$. Sia G il gruppo formato da f e dall'identita' di $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, e si denoti con X lo spazio delle orbite $\left(\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}\right) / G$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' compatto.
(b) X e' di Hausdorff.
(c) X e' omotopicamente equivalente ad $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
(d) Il toro e' un quoziente di X.

Svolgimento. L'omeomorfismo

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, log\|\mathbf{x}\| \right) \in S^1 \times \mathbf{R}$$

induce un omeomorfismo

$$X \cong S^1/\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{R}/\{1\},$$

dove l'azione di $\mathbf{Z}_2$ su S^1 e' l'antipodalita'. Percio' X e' omeomorfo ad $S^1 \times \mathbf{R}$. In particolare X non e' compatto, e' di Hausdorff, ed e' omotopicamente equivalente ad $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ perche' e' omeomorfo a tale spazio. Infine osserviamo che (d) e' vera, perche' la mappa $(x,y,t) \in S^1 \times \mathbf{R} \to (x, y, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1 \times S^1$ e' continua, suriettiva ed aperta.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ∎

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, II appello, 24 Febbraio 2015 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione biiettiva tra spazi topologici. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se f e' un omeomorfismo allora, per ogni sottoinsieme S di X, si ha $f(\overline{S}) = \overline{f(S)}$.

(b) Se per ogni sottoinsieme S di X si ha $f(\overline{S}) = \overline{f(S)}$, allora f e' un omeomorfismo.

(c) Se f e' un omeomorfismo allora, per ogni sottoinsieme S di X, si ha $f(\partial S) = \partial f(S)$.

(d) Se per ogni sottoinsieme S di X si ha $f(\partial S) = \partial f(S)$, allora f e' un omeomorfismo.

Svolgimento. Le affermazioni sono tutte vere.

Supponiamo innanzitutto che f sia un omeomorfismo. Allora f e' chiusa, percio' $f(\overline{S})$ e' un chiuso, e poiche' contiene $f(S)$ allora $f(\overline{S}) \supseteq \overline{f(S)}$. Poiche' anche f^{-1} e' chiusa, allora $f^{-1}(\overline{f(S)})$ e' un chiuso di X contenente S, quindi $\overline{S} \subseteq f^{-1}(\overline{f(S)})$. Applicando f si ottiene l'altra inclusione $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$. Cio' prova la (a). Per provare la (c), tenuto conto della (a) e che f e' biiettiva, basta osservare quanto segue:

$$f(\partial S) = f(\overline{S} \cap \overline{X-S}) = f(\overline{S}) \cap f(\overline{X-S}) = \overline{f(S)} \cap \overline{f(X-S)} = \overline{f(S)} \cap \overline{Y - f(S)} = \partial f(S).$$

Allo scopo di provare (b), sia C un chiuso di X. Allora $f(C) = f(\overline{C}) = \overline{f(C)}$. Cio' prova che f e' chiusa. Sia ora D un chiuso in Y. Per le ipotesi in (b) possiamo scrivere:

$$f(\overline{f^{-1}(D)}) = \overline{f(f^{-1}(D))}.$$

Percio', tenuto conto che D e' chiuso, abbiamo

$$f(\overline{f^{-1}(D)}) = \overline{f(f^{-1}(D))} = \overline{D} = D.$$

Applicando f^{-1} deduciamo che $f^{-1}(D) = \overline{f^{-1}(D)}$, e quindi che $f^{-1}(D)$ e' un chiuso. Cio' prova che f e' anche continua, dunque e' un omeomorfismo. Infine andiamo a provare (d). Sia C un chiuso di X. Allora, tenuto conto che cio' equivale a dire che $\partial C \subseteq C$, e delle ipotesi in (d), deduciamo:

$$f(C) = f(C \cup \partial C) = f(C) \cup f(\partial C) = f(C) \cup \partial f(C).$$

In particolare $\partial f(C) \subseteq f(C)$, e percio' $f(C)$ e' chiuso. Cio' prova che f e' chiusa. Inoltre, se D e' un chiuso in Y, abbiamo:

$$f(\partial f^{-1}(D)) = f(f^{-1}(\partial D)) \subseteq f(f^{-1}(D)) = D.$$

Applicando f^{-1} all'inclusione appena provata, si ottiene $\partial f^{-1}(D)) \subseteq f^{-1}(D)$, il che prova che $f^{-1}(D)$ e' un chiuso, quindi f e' anche continua, e percio' un omeomorfismo.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 2. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici, e sia y_0 un punto in $f(X)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se f e' chiusa allora, per ogni aperto A di X contenente $f^{-1}(y_0)$, esiste un intorno aperto B di y_0 in Y tale che $f^{-1}(B) \subseteq A$.

(b) Se f e' aperta allora, per ogni aperto A di X contenente $f^{-1}(y_0)$, esiste un intorno aperto B di y_0 in Y tale che $f^{-1}(B) \subseteq A$.

(c) Se f e' continua allora, per ogni aperto A di X contenente $f^{-1}(y_0)$, esiste un intorno aperto B di y_0 in Y tale che $f^{-1}(B) \subseteq A$.

(d) Se f e' un omeomorfismo allora, per ogni aperto A di X contenente $f^{-1}(y_0)$, esiste un intorno aperto B di y_0 in Y tale che $f^{-1}(B) \subseteq A$.

Svolgimento. Cominciamo con il provare che (a) e' vera. Sia A un aperto in X contenente $f^{-1}(y_0)$. Allora $X - A$ e' un chiuso, ed e' tale che $y_0 \notin f(X - A)$. Poiche' f e' chiusa, allora $f(X - A)$ e' chiuso in Y. Poniamo $B = Y - f(X - A)$. Allora B e' un aperto in Y, e contiene y_0. Inoltre, poiche' $B \cap f(X - A) = \emptyset$, allora $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(f(X - A)) = \emptyset$. In particolare si ha $f^{-1}(B) \cap (X - A) = \emptyset$, quindi $f^{-1}(B) \subseteq A$. Cio' prova la (a) (e la (d)). Invece (b) e (c) sono false. Come controesempio, poniamo $X = [0, 1]$ con la topologia naturale, e sia Y uno spazio di Sierpinsky, cioe' $Y = \{a, b\}$ sia un insieme con due elementi, con topologia data da $\mathcal{A}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}\}$. Consideriamo la funzione $f : X \to Y$ che manda 0 in b, e tutto $(0, 1]$ in a. Tale funzione e' continua ed aperta. Poniamo $y_0 = b$. Allora $f^{-1}(y_0) = \{0\}$. Sia $A = [0, \frac{1}{2})$. Osserviamo che A e' un intorno aperto di 0 in X. Ora Y e' l'unico intorno aperto di y_0, ma $f^{-1}(Y) = [0, 1]$ non e' contenuto in A.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 3. *Sia I il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ formato dai punti (x, y) tali che $xy = 1$, sia I_+ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ formato dai punti (x, y) tali che $xy > 1$, e sia I_- il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ formato dai punti (x, y) tali che $xy < 1$. Si denotino con p e q i punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{R}^2 - I$ ha quattro componenti connesse.

(b) $(\mathbf{R}^2 - I) \cup \{p\}$ e' connesso.

(c) $(\mathbf{R}^2 - I) \cup \{p, q\}$ e' connesso.

(d) I_+ e' connesso per cammini.

(e) I_- e' connesso per cammini.

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che I_- e' un aperto di $\mathbf{R}^2$ connesso per cammini. Infatti per ogni $(x, y) \in I_-$ ed ogni $t \in [0, 1]$, si ha $(tx, ty) \in I_-$ in quanto $(tx)(ty) = t^2xy < 1$. Cio' vuol dire che il segmento di estremi $(0, 0)$ e (x, y) e' tutto contenuto in I_-, dunque che I_- e' stellato, in particolare connesso per cammini. Inoltre I_- e' aperto in $\mathbf{R}^2$ perche' e' l'antimmagine di $(-\infty, 1)$ tramite l'applicazione continua $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \to xy \in \mathbf{R}$. Similmente si puo' provare che, denotati con $I_+^{(1)}$ e con $I_+^{(3)}$ le parti di I_+ contenute rispettivamente nel primo e nel terzo quadrante, tali insiemi sono aperti di $\mathbf{R}^2$ e connessi per cammini. Poiche' I_+ ne e' l'unione disgiunta, allora (d) e' falsa. Invece, per quanto visto prima, I_- e' connesso per cammini, e percio' (e) e' vera. Poiche' $\mathbf{R}^2 - I$ e' unione disgiunta degli aperti connessi $I_+^{(1)}$, $I_+^{(3)}$ e I_-, ne segue che tali aperti sono esattamente le componenti connesse di $\mathbf{R}^2 - I$. Percio' anche (a) e' falsa. Infine osserviamo che $I_- \cup I_+^{(1)} \cup \{p\}$ e $I_+^{(3)} \cup I_- \cup I_+^{(1)} \cup \{p, q\}$ sono connessi per cammini. Percio' $(\mathbf{R}^2 - I) \cup \{p, q\}$ e' connesso, perche' coincide con $I_+^{(3)} \cup I_- \cup I_+^{(1)} \cup \{p, q\}$, mentre $(\mathbf{R}^2 - I) \cup \{p\}$ non e' connesso, perche' e' unione disgiunta dei suoi due aperti connessi $I_+^{(3)}$ e $I_- \cup I_+^{(1)} \cup \{p\}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (c) e la (e). ■

Esercizio 4. *Sia X uno spazio topologico, ed X^∞ la sua compattificazione di Alexandroff. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' connesso allora anche X^∞ e' connesso.

(b) Se X^∞ e' connesso allora anche X e' connesso.

(c) Se X e' connesso per cammini allora anche X^∞ e' connesso per cammini.

(d) Se X^∞ e' connesso per cammini allora anche X e' connesso per cammini.

Svolgimento. Le affermazioni sono tutte false.

A tale proposito, sia X uno spazio connesso per cammini, e compatto (ad esempio un punto, oppure S^1). Sappiamo che X^∞ e' l'unione disgiunta di X e di $\{\infty\}$, e che X e' aperto in X^∞. Ora osserviamo che poiche' X e' compatto allora $\{\infty\}$ e' aperto: infatti $\{\infty\} = \emptyset \cup \{\infty\}$, ed $\emptyset$ e' un aperto di X con complementare X che e' compatto. Cio' prova che X^∞ non e' connesso, e dunque che (a) e (c) sono false. Per le altre affermazioni, consideriamo lo spazio $X := L_1 \cup L_2$, costituito da due rette L_1 e L_2, parallele e disgiunte in $\mathbf{R}^2$. Le due rette sono entrambe chiuse in X, percio' X non e' connesso. Pero' X^∞ e' omeomorfo all'unione di due circonferenze che si intersecano in un punto (cioe' ad una figura tipo "8"), che e' connesso per cammini. Infatti ciascuna retta L_i ha compattificazione L_i^∞ omeomorfa ad $L_i \cup \{\infty\}$ come sottospazio di X^∞. Inoltre $L_i \cup \{\infty\}$ e' un chiuso in X^∞. Poi sappiamo che L_i^∞ e' omeomorfo ad una circonferenza, e quindi con il Lemma di incollamento possiamo costruire un omeomorfismo tra $X^\infty = L_1^\infty \cup L_2^\infty$ e l'unione di due circonferenze che si incontrano in un punto (corrispondente al punto $L_1^\infty \cap L_2^\infty = \{\infty\}$ in X^∞).

In conclusione, non ci sono affermazioni vere. ■

Esercizio 5. *Sia X il sottospazio di $\mathbf{R}^2$ definito ponendo*

$$X := ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) X e' compatto.

(b) X e' di Hausdorff.

(c) X ha due componenti connesse.

(d) X e' contraibile.

Svolgimento. X e' di Hausdorff perche' e' un sottospazio di $\mathbf{R}^2$, con la topologia naturale. Poiche' $\mathbf{R}^2 - X$ e' aperto, allora X e' chiuso in $\mathbf{R}^2$, ed essendo anche limitato, e' compatto. Infine osserviamo che X e' contraibile. Infatti consideriamo la funzione continua $F : X \times [0,1] \to X$ definita ponendo $F((x,y),t) = (x,(1-t)y)$. La funzione iniziale di F e' l'applicazione identica id_X di X, mentre quella finale e' la proiezione di X sull'asse delle ascisse, cioe' e' la funzione $(x,y) \in X \to (x,0) \in X$. Questa funzione e' a sua volta omotopicamente equivalente alla funzione costante $(x,y) \in X \to (0,0) \in X$, tramite l'omotopia $G : ((x,y),t) \in X \times [0,1] \to ((1-t)x, 0) \in X$. Percio' id_X e' omotopicamente equivalente ad una funzione costante, e noi sappiamo che cio' equivale a dire che X e' contraibile. In particolare X e' connesso per cammini, quindi e' connesso, dunque (c) e' falsa.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b) e la (d). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, III appello, 2 Luglio 2015 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia S lo spazio topologico costituito da $\mathbf{R}$, munito della topologia cofinita. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S e' connesso.

(b) S e' connesso per cammini.

(c) L'applicazione $f : (x,t) \in S \times I \to tx \in S$ e' continua ($I := [0,1]$, con la topologia naturale).

(d) S e' contraibile.

Svolgimento. Poiche' i chiusi non banali in S sono i sottoinsiemi finiti di $\mathbf{R}$, allora, data una qualunque funzione $f : X \to S$ da uno spazio topologico X ad S, f e' continua se e solo se $f^{-1}(s)$ e' un chiuso in X, per ogni punto $s \in \mathbf{R}$. In particolare e' continua ogni funzione iniettiva $f : X \to S$ definita in uno spazio di Hausdorff X, perche' allora in X i singoli punti sono dei chiusi. Percio', comunque assegnati due punti distinti $s, s' \in \mathbf{R}$, l'applicazione $t \in [0,1] \to s + t(s' - s) \in S$ e' continua. Ne consegue che S e' connesso per cammini, e dunque (a) e (b) sono vere.

Invece la (c) e' falsa. Infatti se f fosse continua, lo sarebbe (per esempio) nel punto $(2,1) \in S \times I$. In particolare $f^{-1}(S - \{1\})$ sarebbe un intorno di $(2,1)$, cioe' esisterebbe un sottoinsieme finito Σ di S, ed un $\epsilon \in (0,1)$, tali che $(2,1) \in (S - \Sigma) \times (\epsilon, 1]$, e $f((S - \Sigma) \times (\epsilon, 1]) \subseteq S - \{1\}$. Cio' e' impossibile, perche' per ogni $\epsilon \in (0,1)$, l'insieme $S_\epsilon := \{s \in S \,:\, \exists t \in (\epsilon, 1]\, st = 1\}$ e' infinito.

Nonostante cio', S e' contraibile. Per provare che S e' contraibile, e' sufficiente provare l'esistenza di una omotopia $F : S \times I \to S$ tra l'applicazione identica $s \in S \to s \in S$, e la funzione costante $s \in S \to 0 \in S$. A tale scopo fissiamo un'applicazione iniettiva $\varphi : S \times (0,1) \to S$ (una tale applicazione esiste perche' $S \times (0,1)$ ed S sono entrambi equipotenti ad $\mathbf{R}$). Definiamo allora l'applicazione F come segue:

$$F(s,t) := \begin{cases} s & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t = 1 \\ \varphi(s,t) & \text{se } t \in (0,1). \end{cases}$$

Osserviamo che se $s \in S - \{0\}$, allora $F^{-1}(s) = \{(s,0)\} \cup \varphi^{-1}(s)$, mentre $F^{-1}(0) = (S \times \{1\}) \cup \{(0,0)\} \cup \varphi^{-1}(0)$. Tenuto conto che $\varphi^{-1}(s)$ e' costituito al piu' da un punto, cio' mostra che, per ogni $s \in S$, $F^{-1}(s)$ e' un chiuso in $S \times I$. Per quanto detto all'inizio dello svolgimento, allora F e' continua, e percio' e' l'omotopia cercata.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (d). ■

Esercizio 2. *Per ogni intero $n \geq 1$, sia $\mathcal{Z}_n$ la topologia di Zariski per $\mathbf{R}^n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z}_2)$ e' di Hausdorff.

(b) $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z}_2)$ e' connesso.

(c) $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z}_2)$ e' connesso per cammini.

(d) $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z}_2)$ coincide con lo spazio prodotto $(\mathbf{R}, \mathcal{Z}_1) \times (\mathbf{R}, \mathcal{Z}_1)$.

Svolgimento. Sia $\{L_t\}_{t \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}}$ il fascio delle rette di $\mathbf{R}^2$ di centro l'origine. Su ciascuna retta, la topologia di Zariski di $\mathbf{R}^2$ induce la topologia cofinita, ed abbiamo appena visto nell'esercizio precedente che con tale topologia L_t e' connesso per cammini. Cio' prova che anche $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z}_2)$ e' connesso per cammini, in quanto

$$\bigcap_{t \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}} L_t = \{0\} \neq \emptyset, \quad \text{e} \quad \bigcup_{t \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}} L_t = \mathbf{R}^2.$$

Invece $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z}_2)$ non e' di Hausdorff, perche' altrimenti lo sarebbe anche il sottospazio L_t, ma la topologia cofinita su un insieme infinito non e' di Hausdorff.

Concludiamo osservando che anche (d) e' falsa. A tale proposito, consideriamo il chiuso

$$C := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, xy = 1\} \subset (\mathbf{R}^2, \mathcal{Z}_2).$$

L'insieme C non puo' essere chiuso nella topologia prodotto $(\mathbf{R}, \mathcal{Z}_1) \times (\mathbf{R}, \mathcal{Z}_1)$. Altrimenti, ricordando che $\mathcal{Z}_1$ e' la topologia cofinita, esisterebbero insiemi finiti $E, F \subset \mathbf{R}$ tali che

$$(\mathbf{R} - E) \times (\mathbf{R} - F) \subseteq \mathbf{R}^2 - C.$$

Cio' e' impossibile. Infatti, consideriamo l'insieme finito

$$G := E \cup F \cup \left\{ \frac{1}{x} \,:\, x \in (E \cup F) - \{0\} \right\} \cup \{0\}.$$

Abbiamo

$$(*) \qquad (\mathbf{R} - G) \times (\mathbf{R} - G) \subseteq (\mathbf{R} - E) \times (\mathbf{R} - F) \subseteq \mathbf{R}^2 - C.$$

Ma per ogni $x \in \mathbf{R} - G$ si ha anche $\frac{1}{x} \in \mathbf{R} - G$, quindi $(x, \frac{1}{x}) \in [(\mathbf{R} - G) \times (\mathbf{R} - G)] \cap C$, il che contraddice $(*)$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Esercizio 3. *Sia (X, d) uno spazio metrico, e fissiamo un punto $x_0 \in X$, ed un numero reale $\epsilon > 0$. Siano $B := \{x \in X \,:\, d(x, x_0) < \epsilon\}$, $D := \{x \in X \,:\, d(x, x_0) \leq \epsilon\}$, $S := \{x \in X \,:\, d(x, x_0) = \epsilon\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) D e' chiuso.

(b) S e' chiuso.

(c) $D = \overline{B}$.

(d) $S = \partial D$.

Svolgimento. Cominciamo con il provare che D e' chiuso, cioe' che $X - D = \{x \in X \,:\, d(x, x_0) > \epsilon\}$ e' aperto. Fissiamo $x \in X - D$, poniamo $\eta := d(x, x_0) - \epsilon > 0$, e sia

$$B_x := \{y \in X \,:\, d(x, y) < \eta\}.$$

Sara' sufficiente provare che $B_x \subseteq X - D$. Per ogni $y \in B_x$, per la diseguaglainza triangolare abbiamo:

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0),$$

quindi

$$d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, y) > d(x, x_0) - \eta = \epsilon.$$

Cio' prova che $y \in X - D$, percio' $B_x \subseteq X - D$, e quindi (a) e' vera. Anche (b) e' vera perche' S e' intersezione di due chiusi:

$$S = D \cap (X - B).$$

In generale, invece, (c) e (d) sono false (nonostante valgano quando $X = \mathbf{R}^n$ con la metrica euclidea). Infatti se d e' la metrica discreta, posto $\epsilon = 1$, abbiamo:

$$B = \{x_0\} = \overline{B}, \quad D = X,$$

e

$$S = X - \{x_0\}, \quad D = X, \quad \partial D = \emptyset.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). $\blacksquare$

Esercizio 4. *Uno spazio topologico si dice "localmente compatto"se ogni punto ha un intorno compatto. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Ogni spazio metrico e' localmente compatto.

(b) Il prodotto di due spazi localmente compatti e' localmente compatto.

(c) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ *e' localmente compatto.*

(d) $\mathbf{R} - \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ *e' localmente compatto.*

Svolgimento. Poniamo $X := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$. La topologia naturale di $\mathbf{R}$ induce su X la topologia discreta. Percio' se $x \in X$ e' un qualunque punto, allora $\{x\}$ ne e' un intorno compatto, quindi (c) e' vera. Invece (d) e' falsa. Infatti consideriamo $0 \in \mathbf{R} - X$, e per assurdo sia $K \subseteq \mathbf{R} - X$ un intorno compatto di 0 in $\mathbf{R} - X$. Allora esiste un numero reale $\epsilon > 0$ tale che $(\mathbf{R} - X) \cap (-\epsilon, \epsilon) \subseteq K$. D'altra parte, poiche' K e' compatto, allora e' chiuso in $\mathbf{R}$. Ne consegue che $K = \overline{K}$ ($\overline{K}$:= chiusura di K in $\mathbf{R}$), e percio'

$$K = \overline{K} \supseteq \overline{(\mathbf{R} - X) \cap (-\epsilon, \epsilon)} = [-\epsilon, \epsilon].$$

Cio' implica $K \cap X \neq \emptyset$, che e' in contrasto con il fatto che $K \subseteq \mathbf{R} - X$. Poiche' (d) e' falsa, allora lo e' anche (a) in quanto $\mathbf{R} - X$ e' uno spazio metrico. Invece (b) e' vera. Infatti, siano Y_1 ed Y_2 due spazi localmente compatti, e sia $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ un punto. Poiche' Y_1 ed Y_2 sono localmente compatti, esistono intorni compatti K_1 di y_1, e K_2 di y_2. Allora $K_1 \times K_2$ e' un intorno compatto di (y_1, y_2) in $Y_1 \times Y_2$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). $\blacksquare$

Esercizio 5. *Siano A e B sottospazi compatti di uno spazio X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' di Hausdorff allora $A \cup B$ e' compatto.

(b) Se X e' di Hausdorff allora $A \cap B$ e' compatto.

(c) $A \cup B$ e' compatto.

(d) $A \cap B$ e' compatto.

Svolgimento. Sia $\mathcal{R} := \{R_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $A \cup B$. Tale ricoprimento ricopre anche A e B, e poiche' A e B sono compatti, devono esistere insiemi finiti di indici E, F contenuti in I tali che $A \subseteq \bigcup_{i \in E} R_i$ e $B \subseteq \bigcup_{i \in F} R_i$. Ma allora $\{R_i\}_{i \in E \cup F}$ e' un sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$, di $A \cup B$. Cio' prova che $A \cup B$ e' compatto, cioe' che (c) e' vera (percio' lo e' anche (a)). Anche (b) e' vera. Infatti in uno spazio di Hausdorff i sottospazi compatti sono chiusi. Quindi $A \cap B$ e' un chiuso, ed essendo un chiuso anche in A (che e' compatto), e' compatto.

Invece (d) e' falsa. Infatti sia $(X, \mathcal{A}_X)$ un insieme infinito con la topologia discreta, chiaramente X non e' compatto. Aggiungiamo due punti a, b ad X, ed in $Y := X \cup \{a, b\}$ consideriamo la topologia $\mathcal{A}_Y$ cosi' definita: $U \in \mathcal{A}_Y$ se e solo se $U \subseteq X$, oppure $U = Y$, oppure $U = X \cup \{a\}$, oppure $U = X \cup \{b\}$. Ora $(X, \mathcal{A}_X)$ e' un sottospazio di $(Y, \mathcal{A}_Y)$, $X \cup \{a\}$ e $X \cup \{b\}$ sono compatti, mentre $X = (X \cup \{a\}) \cap (X \cup \{b\})$ non lo e'.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (c). $\blacksquare$

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, IV appello, 3 Settembre 2015 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia X un sottoinsieme non vuoto del piano $z = 0$ in $\mathbf{R}^3$. Sia $C(X) \subseteq \mathbf{R}^3$ il cono su X di vertice il punto $v = (0,0,1)$, cioe' $C(X)$ sia l'unione di tutti i segmenti chiusi $\overrightarrow{vp}$ di estremi v e p, al variare di $p \in X$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' connesso allora anche il cono $C(X)$ e' connesso.

(b) Per ogni X, il cono $C(X)$ e' connesso.

(c) Se X e' semplicemente connesso allora anche il cono $C(X)$ e' semplicemente connesso.

(d) Per ogni X, il cono $C(X)$ e' semplicemente connesso.

Svolgimento. Le affermazioni sono tutte vere, in quanto il cono $C(X)$ e' sempre contraibile. Infatti innanzitutto osserviamo che, poiche' $C(X)$ e' un cono, allora per ogni $q \in C(X)$, il segmento $\overrightarrow{vq}$ e' tutto contenuto in $C(X)$ (cioe' $C(X)$ e' stellato). Percio' l'applicazione

$$F : (q,t) \in C(X) \times I \to v + t(q - v) \in C(X)$$

e' ben posta, e' continua, e mostra che l'applicazione identica di $C(X)$, cioe' $q \in C(X) \to F(q,1) = q \in C(X)$, e' omotopa all'applicazione costante $q \in C(X) \to F(q,0) = v \in C(X)$. Cio' equivale a dire che $C(X)$ e' contraibile. Sappiamo poi che uno spazio contraibile e' connesso per cammini, quindi connesso, ed e' anche semplicemente connesso.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 2. *Si consideri l'omeomorfismo $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ definito ponendo $f(z) = -\bar{z}$, e sia G il gruppo formato da f e da $\mathrm{id}_{\mathbf{C}^*}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{C}^*/G$ e' compatto.

(b) $\mathbf{C}^*/G$ e' di Hausdorff.

(c) $\mathbf{C}^*/G$ e' connesso.

(d) $\mathbf{C}^*/G$ e' contraibile.

Svolgimento. L'omeomorfismo

$$z \in \mathbf{C}^* \to \left(\frac{z}{\|z\|}, \log \|z\| \right) \in S^1 \times \mathbf{R}$$

induce un omeomorfismo

$$\mathbf{C}^*/G \cong S^1/H \times \mathbf{R}/\{1\},$$

dove H e' il gruppo corrispondente alla restrizione di f su S^1. Poiche' f e' la riflessione rispetto all'asse delle y, l'azione di H identifica i punti di S^1 con la stessa ordinata. Ne consegue che la mappa quoziente $S^1 \to S^1/H$ si identifica con la proiezione ortogonale $(x,y) \in S^1 \to (0,y) \in \{0\} \times [-1,1]$ di S^1 sull'asse delle ordinate. Percio' S^1/H e' omeomorfo a $[-1,1]$, e dunque $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo al prodotto $[-1,1] \times \mathbf{R}$. Ne consegue che $\mathbf{C}^*/G$ non e' compatto, e' di Hausdorff, e' connesso, ed e' contraibile perche' lo e' $[-1,1] \times \mathbf{R}$ in quanto convesso.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ■

Esercizio 3. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, tale che ogni suo punto possieda almeno un intorno compatto. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' compatto.

(b) Ogni intorno di un punto x di X contiene un intorno compatto di x.

(c) Per ogni sottospazio compatto K di X, ed ogni aperto U di X contenente K, esiste un compatto $L \subseteq U$ tale che K sia contenuto nell'interno di L.

(d) Per ogni sottospazio compatto K di X, ed ogni aperto U di X contenente K, esiste un compatto $L \subseteq U$ tale che K contenga l'interno di L.

Svolgimento. Osserviamo che $\mathbf{R}$ e' di Hausdorff, ogni suo punto x possiede un intorno compatto (per esempio $[x-1, x+1]$), ma $\mathbf{R}$ non e' compatto. Percio' (a) e' falsa. Invece le rimanenti affermazioni sono tutte vere.

Sia x un punto di X, e K un suo intorno compatto. Sia N un qualsiasi intorno di x, che possiamo supporre aperto, e consideriamo $K - N$, che e' compatto. Poiche' X e' di Hausdorff, allora per ogni $y \in K - N$ esiste un intorno aperto U_y di y, ed un intorno aperto V_y di x tale che $U_y \cap V_y = \emptyset$ (se $K - N$ e' vuoto, allora $K \subseteq N$). Poiche' $K - N$ e' compatto, allora, tenuto conto che $\{U_y\}_{y \in K-N}$ e' un ricoprimento aperto di $K - N$, esistono $y_1, \ldots, y_n \in K - N$ tali che $K - N \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Percio'

$$K - \left(\bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \right) \subseteq N.$$

Cio' prova (b) in quanto $K - (\bigcup_{i=1}^n U_{y_i})$ e' compatto, e contiene

$$K \cap N \cap \left(\bigcap_{i=1}^n V_{y_i} \right),$$

che e' un intorno di x.

Per provare (c), per ogni $x \in K$ scegliamo un intorno compatto N_x di x contenuto in U (tale intorno esiste per quanto appena provato). Sia N_x° l'interno di N_x. Allora $\{N_x^\circ\}_{x \in K}$ e' un ricoprimento aperto di K, che possiede un sottoricoprimento finito in quanto K e' compatto:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n N_{x_i}^\circ.$$

E' sufficiente allora porre

$$L = \bigcup_{i=1}^n N_{x_i},$$

che e' compatto perche' unione finita di compatti.

Infine osserviamo che (d) e' ovvia, basta prendere $L = K$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ■

Esercizio 4. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due topologie su un insieme X, si assuma $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $(X, \mathcal{A})$ e' compatto, allora anche $(X, \mathcal{B})$ e' compatto.

(b) Se $(X, \mathcal{B})$ e' compatto, allora anche $(X, \mathcal{A})$ e' compatto.

(c) Se $(X, \mathcal{A})$ e' di Hausdorff, allora anche $(X, \mathcal{B})$ e' di Hausdorff.

(d) Se $(X, \mathcal{B})$ e' di Hausdorff, allora anche $(X, \mathcal{A})$ e' di Hausdorff.

(e) Se $(X, \mathcal{A})$ e' connesso, allora anche $(X, \mathcal{B})$ e' connesso.

(f) Se $(X, \mathcal{B})$ e' connesso, allora anche $(X, \mathcal{A})$ e' connesso.

Svolgimento. Sia $\mathcal{R} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $(X, \mathcal{B})$. Poiche' $\mathcal{R}$ e' anche un ricoprimento aperto di $(X, \mathcal{A})$, se $(X, \mathcal{A})$ e' compatto allora $\mathcal{R}$ possiede un sottoricoprimento finito. Percio' (a) e' vera. Invece (b) e' falsa. Infatti, se $\mathcal{B} = \{\emptyset,\ X\}$ ed $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, allora $(X, \mathcal{B})$ e' compatto, mentre se X e' infinito, $(X, \mathcal{A})$ non lo e'. Questo stesso esempio mostra che (c) ed (f) sono false. Invece (d) ed (e) sono vere. Infatti, siano x, y elementi distinti di X. Se $(X, \mathcal{B})$ e' di Hausdorff, allora possiamo separare x ed y con due aperti di $(X, \mathcal{B})$. Ma tali aperti lo sono anche in $(X, \mathcal{A})$, dunque x ed y si possono separare anche in $(X, \mathcal{A})$. Infine, sia Y un sottoinsieme di X che sia aperto e chiuso in $(X, \mathcal{B})$. Allora Y sara' tale anche in $(X, \mathcal{A})$. Percio', se $(X, \mathcal{A})$ e' connesso, allora Y e' un sottoinsieme banale di X. Cio' prova (e).

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (d) ed (e). ■

Esercizio 5. *Sia X lo spazio topologico avente come sostegno* $\mathbf{R}$*, munito della topologia di Sorgenfrey (cioe' $U \subseteq X$ e' aperto se e solo se per ogni $x \in U$ esiste $y > x$ tale che $[x, y) \subseteq U$). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' compatto.

(b) X e' di Hausdorff.

(c) Il sottospazio $A := \{1\} \cup \left\{1 - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}\right\}$ e' compatto.

(d) Il sottospazio $B := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}\right\}$ e' compatto.

Svolgimento. Sappiamo che la topologia di Sorgenfrey e' piu' fine della naturale (cioe' la topologia naturale e' contenuta in quella di Sorgenfrey), percio', in base allo svolgimento dell'esercizio precedente, (a) e' falsa, e (b) e' vera.

Ora andiamo a provare che (c) e' falsa, mentre (d) e' vera. Che (c) sia falsa segue dal fatto che il seguente ricoprimento aperto di A non ammette un sottoricoprimento finito:

$$A \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) \right) \cup [1, 2).$$

Infine sia $\mathcal{R} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di B:

$$B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Allora esiste un i_0 tale che $0 \in U_{i_0}$. Percio' esiste un $x > 0$ tale che

$$[0, x) \subseteq U_{i_0}.$$

Ma allora per ogni intero $n > \frac{1}{x}$ si ha $\frac{1}{n} \in U_{i_0}$. Quindi solo per un numero finito di interi $n \in \mathbf{N}$ si ha $\frac{1}{n} \notin U_{i_0}$, e percio' e' possibile estrarre da $\mathcal{R}$ un sottoricoprimento finito di B.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (d). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, I appello, 3 Febbraio 2016 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Uno spazio topologico non vuoto S si dice irriducibile se non esistono sottoinsiemi chiusi C_1 e C_2 di S tali che $C_1 \neq S$, $C_2 \neq S$ ed $S = C_1 \cup C_2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se uno spazio X e' irriducibile, allora e' connesso.

(b) Se uno spazio X e' connesso, allora e' irriducibile.

(c) Un sottospazio Y di uno spazio X e' irriducibile se e solo se lo e' la sua chiusura $\overline{Y}$.

(d) Se uno spazio X e' irriducibile, allora ogni suo aperto non vuoto lo e'.

Svolgimento. Se X e' irriducibile e C_1 e C_2 sono due chiusi disgiunti tali che $X = C_1 \cup C_2$, allora tali chiusi non possono essere entrambi sottoinsiemi propri di X. Quindi X e' connesso. Il viceversa e' falso. Ad esempio $\mathbf{R}$ con la topologia naturale e' connesso, ma l'uguaglianza $\mathbf{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ ci dice che $\mathbf{R}$ non e' irriducibile.

Ora sia Y un sottospazio irriducibile di uno spazio X. Se $\overline{Y} = C_1 \cup C_2$, con C_1 e C_2 chiusi in $\overline{Y}$, percio' chiusi anche in X, allora $Y = (Y \cap C_1) \cup (Y \cap C_2)$. Poiche' Y e' irriducibile, allora $Y = Y \cap C_i$ per qualche $i \in \{1, 2\}$. Quindi $Y \subseteq C_i$, il che implica $\overline{Y} = C_i$. Cio' prova che $\overline{Y}$ e' irriducubile. Viceversa, se $\overline{Y}$ e' irriducibile, ed $Y = C_1 \cup C_2$ con C_1 e C_2 chiusi in Y, allora, per opportuni chiusi Γ_1 e Γ_2 di X abbiamo $C_i = \Gamma_i \cap Y$, $i \in \{1, 2\}$. Quindi $Y = (Y \cap \Gamma_1) \cup (Y \cap \Gamma_2)$. Passando alle chiusure, abbiamo $\overline{Y} = \overline{Y \cap \Gamma_2} \cup \overline{Y \cap \Gamma_2}$. Per l'irriducibilita' di $\overline{Y}$ abbiamo $\overline{Y} = \overline{Y \cap \Gamma_i}$ ($\subseteq \Gamma_i$) per qualche i. Quindi $Y \subseteq \Gamma_i$ e percio' $Y = C_i$. Cio' prova che Y e' irriducibile.

Infine supponiamo X irriducibile e sia A un aperto non vuoto di X. Allora $X = \overline{A} \cup (X \backslash A)$. Percio' $A = X$, oppure $X = \overline{A}$. In ogni caso $\overline{A}$ e' irriducibile. Per quanto visto prima cio' prova che A e' irriducibile.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (c) e la (d). $\blacksquare$

Esercizio 2. *Sia $f : X \to Y$ una funzione tra spazi topologici, a priori non necessariamente continua. Sia $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ il grafico di f. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' connesso e Γ_f e' compatto, allora f e' continua.

(b) Se X e' compatto e Γ_f e' compatto, allora f e' continua.

(c) Se X e' di Hausdorff e Γ_f e' compatto, allora f e' continua.

(d) Se Γ_f e' compatto, allora X e' compatto.

Svolgimento. Supponiamo che X ed Y siano insiemi finiti, f una biiezione, X con la topologia banale, Y con quella discreta. Allora X, Y e Γ_f sono compatti perche' finiti, X e' connesso, ma, non appena $|X| \geq 2$, f non e' continua. Quindi (a) e (b) sono false. Le rimanenti affermazioni invece sono vere.

Infatti osserviamo innanzitutto che la funzione $\varphi : (x, y) \in \Gamma_f \to x \in X$ e' continua perche' restrizione della funzione continua data dalla proiezione canonica $X \times Y \to X$. Percio' se Γ_f e' compatto lo e' anche X, in quanto φ e' biiettiva. Inoltre, se Γ_f e' compatto ed X e' di Hausdorff, allora φ e' anche chiusa. Quindi, in tali iptesi, φ e' un omeomorfismo. In particolare l'inversa di φ e' continua. Ma l'inversa e' la funzione $x \in X \to (x, f(x)) \in \Gamma_f$. Per la proprieta' universale della topologia prodotto, se tale funzione e' continua, lo sara' anche f.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (c) e la (d). $\blacksquare$

Esercizio 3. *Sia X una $n-$varieta' compatta, ed $U \subseteq X$ un aperto omeomorfo ad $\mathbf{R}^n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $U \neq X$.

(b) *Lo spazio quoziente* $X/(X-U)$ *e' omeomorfo ad* S^n.

(c) *Lo spazio quoziente* $X/(X-U)$ *e' omeomorfo ad* $\mathbf{R}^n$.

(d) *Lo spazio quoziente* $X/(X-U)$ *e' omeomorfo ad* X.

Svolgimento. L'affermazione (a) e' vera in quanto $\mathbf{R}^n$ non e' compatto.

Ora poiche' X e' compatto e di Haudorff, sappiamo che lo spazio quoziente $X/(X-U)$ e' omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di U, che a sua volta e' uno spazio omeomorfo ad S^n. Per cui (b) e' vera, e quindi in generale (c) e (d) sono false.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). ■

Esercizio 4. *Siano* X *ed* Y *spazi topologici,* S *un sottospazio non vuoto di* X*,* $f : X \to Y$ *e* $g : X \to Y$ *funzioni continue,* $f_{|S} : S \to Y$ *e* $g_{|S} : S \to Y$ *le restrizioni su* S*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) *Se* f *e' omotopa a* g*, allora* $f_{|S}$ *e' omotopa a* $g_{|S}$.

(b) $f_{|S}$ *e' omotopa a* $g_{|S}$*, allora* f *e' omotopa a* g.

(c) *Se* $Y = Y_1 \times Y_2$ *ed* f *e' omotopa a* g*, allora per ogni* $i \in \{1, 2\}$*,* $p_{Y_i} f$ *e' omotopa a* $p_{Y_i} g$.

(d) *Se* $Y = Y_1 \times Y_2$ *e, per ogni* $i \in \{1, 2\}$*,* $p_{Y_i} f$ *e' omotopa a* $p_{Y_i} g$*, allora* f *e' omotopa a* g.

Svolgimento. Le affermazioni (a) e (c) sono vere perche' sappiamo che composte di funzioni omotope sono ancora omotope.

La (b) e' falsa. Infatti, sappiamo che S^1 non e' contraibile, percio' la funzione identica di S^1 non e' omotopa ad una funzione costante. Quindi, fissato un punto $p_0 \in S^1$, le funzioni $f : p \in S^1 \to f(p) = p \in S^1$, e $g : p \in S^1 \to g(p) = p_0 \in S^1$, non sono omotope. Pero' se restringiamo f e g su $\{p_0\}$, otteniamo la stessa funzione, percio' tali restrizioni sono omotope.

Infine andiamo a provare che (d) e' vera. Sia $F_i : X \times I \to Y_i$ una omotopia tra $p_{Y_i} f$ e $p_{Y_i} g$. Allora la funzione $F : X \times I \to Y_1 \times Y_2$ definita da:

$$F(x, t) := (F_1(x, t), F_2(x, t)),$$

e' una omotopia tra f e g.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (c), e la (d). ■

Esercizio 5. *Nello spazio proiettivo reale* $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$*, con coordinate* x_0, x_1, x_2, x_3*, si consideri il sottospazio* Q *definito dall'equazione* $x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Q *e' omeomorfo ad* $\mathbf{R}^2$.

(b) Q *e' omeomorfo ad un toro.*

(c) Q *e' omeomorfo ad* S^2.

(d) Q *e' omeomorfo ad* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$.

Svolgimento. E' un toro.

Infatti, consideriamo la retta proiettiva $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ e l'applicazione:

$$f : ([(u_0, u_1)], [(v_0, v_1)]) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to [(u_0v_0, u_0v_1, u_1v_0, u_1v_1)] \in \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}.$$

Tale applicazione e' iniettiva e continua tra spazi compatti di Hausdorff, percio' induce un omeomorfismo

$$\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \cong f(\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}) =: Q_1.$$

Ora Q_1 coincide con il luogo definito dall'equazione $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$, ed un semplice cambio di coordinate porta Q_1 in Q.

Poiche' Q e' omeomorfo ad un toro, allora (a) e' falsa perche' $\mathbf{R}^2$ non e' compatto, e (c) e (d) sono false per il Teorema di classificazione delle superfici.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b).

Osservazione. Potevamo pervenire alla risposta anche con un argomento geometrico. Nell'aperto U_3 di $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ definito dalla condizione $x_3 = 1$, che e' omeomorfo ad $\mathbf{R}^3$, $Q \cap U_3$ coincide con il luogo definito dall'equazione $x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 1$. Si tratta di un iperboloide ad una falda. Il fascio di piani contenenti l'asse delle x_1 realizza l'iperboloide, per intersezione, come unione disgiunta di una famiglia di iperboli. Quindi possiamo pensare a $Q \cap U_3$ come una unione disgiunta di una famiglia di iperboli parametrizzate da $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$. Ora Q, che e' la chiusura di $Q \cap U_3$, si ottiene aggiungendo a ciascuna iperbole della famiglia i due punti all'infinito corrispondenti agli asintoti. Con questi due punti l'iperbole diviene una conica non degenere, che sappiamo essere omeomorfa a $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$. Cio' prova che Q e' in corrispondenza biiettiva con $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$. Un calcolo esplicito prova che tale corrispondenza e' continua, quindi deve essere un omeomorfismo. ∎

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, II appello, 24 Febbraio 2016 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico, $B \subseteq X$ un sottospazio di X, ed $A \subseteq B$ un sottoinsieme di B. Siano $\overline{A}$ ed $\mathring{A}$ la chiusura e l'interno di A in X, e $\overline{A}_B$ ed $\mathring{A}_B$ la chiusura e l'interno di A in B. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\overline{A}_B \subseteq \overline{A} \cap B$.

(b) $\overline{A}_B \supseteq \overline{A} \cap B$.

(c) $\mathring{A}_B \subseteq \mathring{A} \cap B$.

(d) $\mathring{A}_B \supseteq \mathring{A} \cap B$.

Svolgimento. Poiche' $\overline{A} \cap B$ e' un chiuso di B contenente A, allora $\overline{A}_B \subseteq \overline{A} \cap B$. E vale anche il viceversa. Infatti, $\overline{A}_B$ e' un chiuso in B, percio' deve essere del tipo $\overline{A}_B = C \cap B$, per qualche opportuno chiuso C di X. Poiche' C e' un chiuso di X che contiene A, allora deve essere $\overline{A}_B = C \cap B \supseteq \overline{A} \cap B$. Similmente si dimostra anche (d): poiche' $\mathring{A} \cap B$ e' un aperto di B contenuto in A, allora $\mathring{A}_B \supseteq \mathring{A} \cap B$. Il viceversa non vale. Infatti se si assume $A = B$ allora $\mathring{A}_B = A$, ma $\mathring{A}$ potrebbe essere vuoto.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b) e la (d). ■

Esercizio 2. *Sia X il sottospazio di $\mathbf{R}^2$ formato dai punti (x, y), con $y \geq 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' contraibile.

(b) $X \backslash \{(0,0)\}$ e' contraibile.

(c) $X \backslash \{(0,1)\}$ e' contraibile.

(d) Esiste un omeomorfismo $f : X \to X$ di X in se', tale che $f(0,0) = (1,1)$.

Svolgimento. X e' contraibile perche' e' convesso. Anche $X \backslash \{(0,0)\}$ e' contraibile perche' e' stellato. Infatti per ogni $(x,y) \in X$ il segmento di estremi $(0,1)$ ed (x,y) e' tutto contenuto in X. Invece $X \backslash \{(0,1)\}$ non e' contraibile. Infatti $X \backslash \{(0,1)\}$ si retrae sulla circonferenza C di centro $(0,1)$ e raggio 1. Come retrazione si puo'considerare la funzione

$$r : (x,y) \in X \backslash \{(0,1)\} \to (0,1) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}(x, y-1) \in C.$$

Con un argomento simile si vede che per ogni $(x_0, y_0) \in X$, con $y_0 > 0$, $X \backslash \{(x_0, y_0)\}$ non e' contraibile. Percio', se $f : X \to X$ e' un omeomorfismo, allora non puo' accadere che $f(0,0) = (1,1)$, altrimenti $X \backslash \{(0,0)\}$ sarebbe omeomorfo a $X \backslash \{(1,1)\}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b).

Osservazione. L'argomento precedente prova che per ogni omeomorfismo $f : X \to X$ si ha $f(\partial X) = \partial X$, cioe' f deve portare l'asse delle x in se'. ■

Esercizio 3. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra due spazi topologici non vuoti di Hausdorff, con X compatto ed Y connesso. Si assuma che per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di x in X tale che $f(U_x)$ sia un aperto di Y, e tale che f per restrizione induca un omeomorfismo tra U_x ed $f(U_x)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ ha la topologia banale.

(b) Per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ ha la topologia discreta.

(c) *Per ogni* $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ *e' un insieme finito.*

(d) f *e' suriettiva.*

Svolgimento. Sia $y \in f(X)$, ed $x \in f^{-1}(y)$. Poiche' f induce una funzione biiettiva tra U_x ed $f(U_x)$, allora $f^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$. Cio' vuol dire che ogni punto di $f^{-1}(y)$ e' un aperto, e percio' $f^{-1}(y)$ e' discreto. In generale $f^{-1}(y)$ sara' formato da piu' di un punto, percio' (a) e' falsa, mentre (b) e' vera.

Inoltre, poiche' $f^{-1}(y)$ e' un sottospazio chiuso di uno spazio compatto, e' anche compatto. Essendo discreto, e' necessariamente finito. Quindi (c) e' vera.

E' vera anche la (d). Infatti, consideriamo la funzione $y \in Y \to \#f^{-1}(y) \in \mathbf{Z}$, dove con $\#f^{-1}(y)$ denotiamo il numero degli elementi che si trovano in $f^{-1}(y)$. Poiche' Y e' connesso, per provare (d) sara' sufficiente provare che tale funzione e' continua. Cioe' che per ogni $y \in Y$ esiste un intorno V_y di y tale che per ogni $y' \in V_y$ si ha $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y)$.

Ora, se $\#f^{-1}(y) = 0$, cioe' se $y \notin f(X)$, allora possiamo prendere

$$V_y := N - f(X)$$

che e' aperto perche' $f(X)$ e' compatto ed Y e' di Hausdorff.

Se invece $\#f^{-1}(y) = k > 0$, allora, posto $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$, sappiamo che per ogni x_i esiste un intorno aperto U_{x_i} di x_i su cui f induce un omeomorfismo con l'immagine $V_i := f(U_{x_i})$, che e' un aperto. Poiche' X e' di Hausdorff possiamo supporre che gli aperti U_{x_i} siano a due a due disgiunti. Ed allora possiamo prendere

$$V_y := V_1 \cap \dots \cap V_k - f(X - (U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k})).$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (c) e la (d).

Osservazione. Dalla (d) segue, in particolare, che Y deve essere compatto. ∎

Esercizio 4. *Si consideri la funzione* $f : [0,1] \to S^1$ *definita ponendo* $f(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. *Sia* $p_0 = f(0)$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) *La funzione* $f : [0,1] \to S^1$ *e' un omeomorfismo.*

(b) *La funzione* $g : t \in (0,1) \to f(t) \in S^1 \backslash \{p_0\}$ *e' un omeomorfismo.*

(c) *La funzione* $h : t \in [0,1) \to f(t) \in S^1$ *e' un omeomorfismo.*

(d) *L'inversa* h^{-1} *della funzione* $h : t \in [0,1) \to f(t) \in S^1$, *e' chiusa ed aperta.*

Svolgimento. L'affermazione (a) e' falsa perche' f non e' biiettiva.

Invece (b) e' vera. Per provare cio', osserviamo innanzitutto che g e' biiettiva, ed e' continua perche' restrizione di una funzione continua. Inoltre g e' anche aperta. Infatti se A e' un aperto di $(0,1)$, allora $A = g^{-1}(g(A)) = f^{-1}(f(A))$. Tenuto conto che su S^1 la topologia naturale e' quella quoziente indotta da f, l'uguaglianza $A = f^{-1}(f(A))$ ci dice che $f(A)$, che altro non e' che $g(A)$, e' un aperto in S^1, quindi anche in $S^1 \backslash \{p_0\}$. Cio' prova (b).

Poiche' $[0,1)$ e' contraibile, mentre S^1 no, allora $[0,1)$ non puo' essere omeomorfo ad S^1. Quindi (c) e' falsa (con un argomento diretto si potrebbe provare che la funzione inversa della funzione $h : t \in [0,1) \to f(t) \in S^1$ non e' continua in p_0; cio' significa che non e' possibile definire con continuita' l'angolo, su tutto S^1). Un altro modo per provare che (c) e' falsa consiste nell'osservare che mentre S^1 e' compatto, $[0,1)$ non lo e'.

Infine, proviamo che h^{-1} e' chiusa ed aperta. Sia A un aperto in S^1. Allora $h^{-1}(A) = [0,1) \cap f^{-1}(A)$ e' un aperto di $[0,1)$ perche' f e' continua. Per lo stesso motivo h^{-1} trasforma chiusi in chiusi.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), e la (d). ∎

Esercizio 5. *Si consideri l'omeomorfismo* $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ *definito ponendo* $f(z) := 2\overline{z}$. *Sia* $G = \{f^n : n \in \mathbf{Z}\}$ *il gruppo generato da* f *per composizione. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{C}^*/G$ *e' omeomorfo ad* S^2.

(b) $\mathbf{C}^*/G$ *e' omeomorfo ad un toro.*
(c) $\mathbf{C}^*/G$ *e' compatto.*
(d) $\mathbf{C}^*/G$ *e' contraibile.*

Svolgimento. Tramite l'omeomorfismo

$$\varphi : z \in \mathbf{C}^* \to \left(\frac{z}{\|z\|}, \log_2 \|z\|\right) \in S^1 \times \mathbf{R}, \qquad \varphi^{-1} : (x, y, t) \in S^1 \times \mathbf{R} \to 2^t(x, y) \in \mathbf{C}^*,$$

l'azione di G su $\mathbf{C}^*$ si identifica con l'azione di $\mathbf{Z}$ su $S^1 \times \mathbf{R}$ definita da:

$$(n, (x, y, t)) \in \mathbf{Z} \times \left(S^1 \times \mathbf{R}\right) \to (x, (-1)^n y, t + n) \in S^1 \times \mathbf{R}.$$

Allo scopo di identificare il quoziente $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$, innanzitutto osserviamo che $(x, y, t) \sim_{\mathbf{Z}} (x, -y, t + 1)$, e che $(x, y, t) \sim_{\mathbf{Z}} (x, y, t + 2h)$, $h \in \mathbf{Z}$. Percio' possiamo sempre rappresentare una classe $[(x, y, t)]_{\sim_{\mathbf{Z}}}$ con un elemento $(x, y, t) \in \Gamma \times [-1, 1]$, dove Γ denota il sottoinsieme di S^1 costituito dalle coppie del tipo (x, y), $y \geq 0$. Denotata con $\sim$ la relazione di equivalenza indotta da $\mathbf{Z}$ su $\Gamma \times [-1, 1]$, abbiamo allora una naturale applicazione biiettiva

$$g : [(x, y, t)]_{\sim} \in (\Gamma \times [-1, 1])/\sim\ \to [(x, y, t)]_{\sim_{\mathbf{Z}}} \in (S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}.$$

Per la proprieta' universale dello spazio quoziente, g e' continua. Inoltre, tenuto conto che la proiezione canonica $S^1 \times \mathbf{R} \to (S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ e' aperta, e' facile provare che $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ e' uno spazio di Hausdorff. Percio' g e' un omeomorfismo. Poiche' Γ, via proiezione ortogonale, e' omeomorfo a $[-1, 1]$, allora $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ e' omeomorfo al quoziente del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$, sul quale la relazione $\sim$ viene a coincidere con quella che identifica due lati opposti in modo coerente. Cio' prova che $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$, e quindi $\mathbf{C}^*/G$, e' omeomorfo al cilindro $S^1 \times [0, 1]$.

Sappiamo che il cilindro e' compatto, e che $S^1 \times \{0\}$ ne e' un retratto di deformazione. Percio' $\mathbf{C}^*/G$ e' compatto, ed e' omotopicamente equivalente ad S^1. In particolare, $\mathbf{C}^*/G$ non e' contraibile, e non puo' essere omeomorfo ne' alla sfera, che e' semplicemente connessa, ne' al toro, il cui gruppo fondamentale e' $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c)(*). ∎

(*)Alcuni studenti mi hanno fatto notare che c'e' un errore: infatti la relazione di equivalenza indotta sul quadrato non solo identifica due lati opposti in modo coerente, ma sugli altri due lati del quadrato, diciamo i lati costituiti dai punti $(-1, t)$ e $(1, t)$ $(-1 \leq t \leq 1)$, identifica $(-1, t)$ con $(-1, t + 1)$ se $-1 \leq t \leq 0$, e $(1, t)$ con $(1, t + 1)$ se $-1 \leq t \leq 0$. In altre parole $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ e' omeomorfo al quoziente di un esagono con identificazioni del tipo $aabccb^{-1}$. Con un argomento tipo quello utilizzato per provare che la somma connessa di due piani proiettivi e' la bottiglia di Klein K, si vede che tale quoziente e' omeomorfo proprio alla somma connessa di due piani proiettivi, cioe' a K (infatti $aabccb^{-1} = aa + bccb^{-1} = aa + bcbc = aa + bb = K$). Cio' nonostante, la (c) rimane ancora l'unica affermazione vera. Innazitutto, per il Teorema di classificazione delle superfici, la bottiglia di Klein non e' omeomorfa ne' alla sfera ne' al toro. Inoltre K non e' contraibile. Infatti la funzione $f(x, y) := (1, y)$ retrae il quoziente del quadrato sul quoziente del lato destro, che e' una circonferenza. Quindi S^1 e' un retratto della bottiglia di Klein K. Ne consegue che il gruppo fondamentale di K possiede un sottogruppo isomorfo a $\mathbf{Z}$, e percio' K non e' contraibile (in realta' il gruppo fondamentale di K, modulo derivato, e' $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2$, ma questo, a lezione, non lo abbiamo dimostrato).

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, III appello, 7 Luglio 2016 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Un'applicazione continua $f : X \to Y$ si dice "propria" se per ogni compatto $K \subseteq Y$ di Y, la sua antimmagine $f^{-1}(K) \subseteq X$ e' un compatto. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono proprie, allora lo e' anche $g \circ f$.

(b) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue e $g \circ f$ e' propria, allora anche f e' propria.

(c) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue e $g \circ f$ e' propria, allora anche g e' propria.

(d) La funzione $f : x \in \mathbf{R} \to x^2 \in \mathbf{R}$ e' propria.

Svolgimento. Supponiamo che f e g siano proprie. Allora innanzitutto $g \circ f$ e' continua. Poi se K e' un compatto di Z allora $g^{-1}(K)$ e' un compatto di Y perche' g e' propria. Poiche' anche f e' propria, allora anche $f^{-1}(g^{-1}(K))$ e' compatto. Poiche' $(g \circ f)^{-1}(K) = f^{-1}(g^{-1}(K))$, ne consegue che (a) e' vera.

Invece (b) e (c) sono false. Infatti consideriamo le applicazioni continue $f : x \in [0, 1] \to x \in \mathbf{R}_b$, e $g : x \in \mathbf{R}_b \to 0 \in \mathbf{R}_b$, dove $\mathbf{R}_b$ denota lo spazio con supporto $\mathbf{R}$, munito della topologia banale. Allora $g \circ f$ e' una funzione costante, percio' propria in quanto $[0, 1]$ e' compatto. Ma f non e' propria perche' $(0, 1)$ e' un compatto di $\mathbf{R}_b$ (tutti i sottospazi di $\mathbf{R}_b$ sono compatti), mentre $(0, 1) = f^{-1}((0, 1))$, con la topologia naturale, non e' compatto. Cio' prova che (b) e' falsa. Per provare che lo e' (c) consideriamo le stesse funzioni $f : x \in [0, 1] \to x \in \mathbf{R}$, e $g : x \in \mathbf{R} \to 0 \in \mathbf{R}$, dove adesso $\mathbf{R}$ e' munito della topologia naturale. Come prima, la funzione $g \circ f$ e' propria, mentre g non lo e' perche' $\mathbf{R}$ non e' compatto.

Infine andiamo a provare che (d) e' vera. Infatti f e' continua. Inoltre, se $K \subset \mathbf{R}$ e' un compatto, allora per un opportuno $b \in \mathbf{R}$, con $b > 0$, si avra' $K \subseteq [-b, b]$. Quindi $f^{-1}(K) \subseteq [-\sqrt{b}, \sqrt{b}]$, percio' $f^{-1}(K)$ e' limitato. Poiche' K e' chiuso ed f e' continua, allora $f^{-1}(K)$ e' anche chiuso, quindi chiuso e limitato, cioe' compatto.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (d). ■

Esercizio 2. *Sia X un sottoinsieme non vuoto del piano $z = 0$ in $\mathbf{R}^3$. Sia $C(X) \subseteq \mathbf{R}^3$ il cono su X di vertice il punto $v = (0, 0, 1)$, cioe' $C(X)$ sia l'unione di tutti i segmenti chiusi $\overrightarrow{vx}$ di estremi v ed x, al variare di $x \in X$. Sia $Y := C(X) - \{v\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $x, z \in X$ allora $\overrightarrow{vx} \cap \overrightarrow{vz} = \{v\}$ se e solo se $x \neq z$.

(b) X e' un retratto di Y.

(c) X e' un retratto di deformazione di Y.

(d) X e' un retratto di deformazione in senso forte di Y.

(e) Se X e' connesso allora lo e' anche Y.

(f) Se Y e' connesso allora lo e' anche X.

Svolgimento. Le affermazioni sono tutte vere.

Cominciamo col dimostrare (a). Sia $y \in \overrightarrow{vx} \cap \overrightarrow{vz}$, con $y \neq v$. Allora le rette $\ell_{v,x}$ e $\ell_{v,z}$ coincidono, avendo due punti distinti in comune. Ma la retta $\ell_{v,x}$ interseca il piano $z = 0$ solo nel punto x, e la retta $\ell_{v,z}$ solo nel punto z, quindi deve essere $x = z$.

In base alla (a) possiamo dire che Y e' l'unione disgiunta dei segmenti semiaperti $\overrightarrow{vx} - \{v\}$, al variare di $x \in X$. Percio' per ogni $y = (y_1, y_2, y_3) \in Y$ esiste un unico $x = (x_1, x_2, 0) \in X$ ed un unico $t \in (0, 1]$ tali che

$$y = (y_1, y_2, y_3) = v + t(x - v) = (tx_1, tx_2, 1 - t),$$

da cui:

$$x_1 = \frac{y_1}{1 - y_3}, \quad x_2 = \frac{y_2}{1 - y_3}$$

(per inciso, queste formule sono un altro modo per vedere che x e' unico, quindi un altro modo per provare (a)). Ne consegue che l'applicazione

$$r : y \in Y \to r(y) := \left(\frac{y_1}{1-y_3}, \frac{y_2}{1-y_3}, 0 \right) \in X$$

e' un retrazione di Y su X. Cio' prova (b), ed anche (f) perche' $r(Y) = X$. Ora, considerando il segmento che congiunge y con $r(y)$, possiamo definire l'applicazione continua:

$$F : (y,s) \in Y \times [0,1] \to y + s(r(y) - y) \in Y,$$

che risulta un'omotopia, relativa ad X, tra id_Y ed $i \circ r$ (i denota l'inclusione di X in Y). Cio' prova (d), che a sua volta implica (c).

Per concludere andiamo a provare (e). A tale proposito sia $Y = A_1 \cup A_2$ una unione disgiunta di due aperti. Poiche' X e' connesso, allora X e' contenuto in uno di tali aperti, diciamo A_1. Ora sia $y \in Y$. Poiche' il segmento $\overrightarrow{vr(y)} - \{v\}$ e' connesso, ed ha intersezione non vuota con A_1, anch'esso deve essere tutto contenuto in A_1. Cio' prova che $Y \subseteq A_1$, cioe' che anche Y e' connesso.

In conclusione, tutte le le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 3. *Sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva, continua e chiusa. Si assuma che esiste un punto $y_0 \in Y$ tale che f induce per restrizione un omeomorfismo $g : x \in X - f^{-1}(y_0) \to f(x) \in Y - \{y_0\}$ tra $X - f^{-1}(y_0)$ ed $Y - \{y_0\}$. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutti gli aperti di X contenenti $f^{-1}(y_0)$, e sia $\mathcal{G}$ l'insieme di tutti gli aperti di Y contenenti $\{y_0\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) f e' aperta.

(b) L'applicazione $V \in \mathcal{G} \to f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ e' iniettiva.

(c) L'applicazione $V \in \mathcal{G} \to f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ e' suriettiva.

(d) L'applicazione $V \in \mathcal{G} \to f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ e' biiettiva.

Svolgimento. In generale non e' detto che f sia aperta: come controesempio possiamo considerare la funzione $f : t \in [0,1] \to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1$. Tale funzione e' suriettiva, continua, chiusa, ed induce un omeomorfismo tra $(0,1) = [0,1] - f^{-1}(y_0)$ ed $S^1 - \{y_0\}$, dove $y_0 := (1,0)$. Ma non e' aperta, in quanto l'immagine di $[0, \frac{1}{2})$ e' l' arco di circonferenza di estremi y_0 (compreso) e $(-1,0)$ (escluso). Quindi (a) e' falsa.

Le altre affermazioni invece sono vere. Per provare cio' denotiamo con φ l'applicazione $V \in \mathcal{G} \to f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Se $\varphi(V) = \varphi(V')$ allora $ff^{-1}(V) = ff^{-1}(V')$. Poiche' f e' suriettiva, allora $V = ff^{-1}(V)$ e $V' = ff^{-1}(V')$, e percio' $V = V'$. Cio' prova l'iniettivita' di φ. Per provarne la suriettivita', sia $U \in \mathcal{F}$ un qualunque aperto di X contenente $f^{-1}(y_0)$. Sara' sufficiente provare che:

$$(i) \quad f(U) \in \mathcal{G}, \quad \text{e} \quad (ii) \quad f^{-1}f(U) = U.$$

Poiche' U contiene $f^{-1}(y_0)$, per provare (i) occorre provare soltanto che $f(U)$ e' un aperto in Y. Poiche' f e' chiusa, a tale scopo sara' sufficiente provare che $Y - f(U) = f(X - U)$. Sia $y \in Y - f(U)$. Poiche' f e' suriettiva allora esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$, e poiche' $y \notin f(U)$ tale x non puo' stare in U. Cio' prova che $Y - f(U) \subseteq f(X - U)$. Viceversa, sia $y \in f(X - U)$. Allora esiste $x \in X - U$ tale che $y = f(x)$, in particolare $y \neq y_0$. Poiche' f per restrizione induce una biiezione tra $X - f^{-1}(y_0)$ ed $Y - \{y_0\}$, ne consegue che x e' l'unico elemento di X tale che $y = f(x)$, e percio' $y \in Y - f(U)$. Infine andiamo a provare (ii). Sia $x \in f^{-1}f(U)$. Allora esiste $u \in U$ tale che $f(x) = f(u)$. Ora, se $f(x) = y_0$ allora $x \in f^{-1}(y_0)$ e percio' $x \in U$ in quanto U contiene $f^{-1}(y_0)$. Se $f(x) \neq y_0$ allora deve essere $x = u \in U$ perche' f per restrizione induce una biiezione tra $X - f^{-1}(y_0)$ ed $Y - \{y_0\}$. Cio' prova che $f^{-1}f(U) \subseteq U$. Il viceversa e' ovvio.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (c) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia $\mathcal{A}$ l'insieme formato da tutti gli intervalli aperti di* $\mathbf{R}$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{A}$ e' stabile rispetto alle unioni.

(b) $\mathcal{A}$ e' stabile rispetto alle intersezioni finite.

(c) $\mathcal{A}$ e' una topologia per $\mathbf{R}$.

(d) $\mathcal{A}$ e' la topologia naturale di $\mathbf{R}$.

Svolgimento. L'unione $(0,1) \cup (2,3)$ non e' un intervallo, percio' (a) e' falsa, e di conseguenza sono false anche (c) e (d). Invece (b) e' vera perche' l'intersezione di due intervalli aperti e' un intervallo aperto.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 5. *Sia (S,d) uno spazio metrico, X ed Y due sottospazi di S, e sia $d(X,Y)$ la distanza tra X ed Y, definita come l'estremo inferiore dell'insieme numerico $\{d(x,y) \,:\, x \in X,\, y \in Y\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' chiuso e $d(X,Y) = 0$, allora $X \cap Y \neq \emptyset$.

(b) Se X ed Y sono chiusi e $d(X,Y) = 0$, allora $X \cap Y \neq \emptyset$.

(c) Se X e' chiuso ed Y e' compatto e $d(X,Y) = 0$, allora $X \cap Y \neq \emptyset$.

(d) Se X ed Y sono compatti e $d(X,Y) = 0$, allora $X \cap Y \neq \emptyset$.

Svolgimento. In $\mathbf{R}^2$ consideriamo l'iperbole X definita dall'equazione $xy = 1$, e l'asintoto Y definito dall'equazione $x = 0$. Osserviamo che X ed Y sono disgiunti, e sono anche chiusi perche' $X = f^{-1}(0)$ ed $Y = g^{-1}(0)$, con $f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \to xy - 1 \in \mathbf{R}$ e $g : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \to x \in \mathbf{R}$. Inoltre, per ogni $\epsilon > 0$, si ha $d((\epsilon, \frac{1}{\epsilon}), (0, \frac{1}{\epsilon})) = \epsilon$, percio' $d(X,Y) = 0$. Dunque questo esempio mostra che (a) e (b) sono false.

Invece (c), e quindi (d), sono vere. Per provare (c) cominciamo col ricordare che la funzione $y \in Y \to d(y,X) \in \mathbf{R}$ e' continua. Percio', se Y e' compatto, tale funzione ammette un punto di minimo $y_0 \in Y$, tale cioe' che $d(y_0,X) = \min\{d(y,X) \,:\, y \in Y\}$. Per le proprieta' dell'estremo inferiore si ha anche $d(y_0,X) = \min\{d(y,X) \,:\, y \in Y\} = d(X,Y)$. Se $d(X,Y) = 0$ allora $d(y_0,X) = 0$. Questo vuol dire che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $x \in X$ tale che $d(y_0,x) < \epsilon$. Il che implica che $y_0 \in \overline{X}$. Quindi se X e' chiuso, allora $y_0 \in X$, dunque $X \cap Y \neq \emptyset$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (c) e la (d). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, IV appello, 12 Settembre 2016 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico, e C_1 e C_2 due chiusi disgiunti non vuoti di X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Esistono aperti disgiunti A_1 ed A_2 tali che $C_1 \subseteq A_1$ e $C_2 \subseteq A_2$.

(b) Se esistono aperti disgiunti A_1 ed A_2 tali che $C_1 \subseteq A_1$ e $C_2 \subseteq A_2$, allora $\overline{A}_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

(c) Se esistono aperti disgiunti A_1 ed A_2 tali che $C_1 \subseteq A_1$ e $C_2 \subseteq A_2$, allora $\overline{A}_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Svolgimento. Se la topologia di X e' quella cofinita, allora i punti di X sono chiusi. Se inoltre X e' infinito, non sara' possibile separarne i punti. Percio' (a) e' falsa. Andiamo a provare che (c) e' vera, e quindi (b) e' falsa. Se $x \in \overline{A}_1$ allora ogni intorno di x deve intersecare A_1. Percio' non puo' accadere che $x \in C_2$, perche' altrimenti A_1 ed A_2 non sarebbero disgiunti.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ∎

Esercizio 2. *Sia X uno spazio topologico (non vuoto), e $\varphi : X \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Per ogni $a \in \mathbf{R}$, sia $X^a := \varphi^{-1}((-\infty, a])$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se ogni X^a e' connesso allora X e' connesso.

(b) Se X e' connesso allora ogni X^a e' connesso.

(c) Se ogni X^a e' connesso per cammini allora X e' connesso per cammini.

(d) Se ogni X^a e' semplicemente connesso allora X e' semplicemente connesso.

(e) Se ogni X^a e' compatto allora X e' compatto.

Svolgimento. Cominciamo col provare che (a) e' vera. Sia $X = A_1 \cup A_2$ una decomposizione di X in aperti disgiunti. Fissiamo un a_0 per cui X^{a_0} non e' vuoto. Poiche' X^{a_0} e' connesso, allora X^{a_0} sara' contenuto in A_1 oppure in A_2. Per fissare le idee supponiamo che $X^{a_0} \subseteq A_1$. Ma allora tutti gli X^a sono contenuti in A_1, quindi $X = A_1$, e percio' la decomposizione deve essere banale. Cio' prova che (a) e' vera. Invece (b) e' falsa, come mostra la funzione $x \in \mathbf{R} \to -|x| \in \mathbf{R}$. Ora andiamo a provare che (c) e' vera. A tale proposito siano x, y due elementi in X, e sia a tale che $x, y \in X^a$. Poiche' X^a e' connesso per cammini, allora esiste un cammino $f : I \to X^a$ che congiunge x con y. Ma allora, se $i : X^a \to X$ denota l'inclusione di X^a in X, $i \circ f : I \to X$ e' un cammino in X che congiunge x con y. Cio' prova che X e' connesso per cammini. Per provare (d) sara' allora sufficiente provare che, fissato $x \in X$, si ha $\pi(X, x) = 0$. Per provare cio', sia $\xi \in \pi(X, x)$ un elemento rappresentato dal cammino $g : I \to X$. Poiche' $g(I)$ e' compatto, esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $g(I) \subseteq X^a$. Quindi g induce un cammino $f : I \to X^a$ tale che $i \circ g = f$. In particolare ξ e' nell'immagine dell'omomorfismo $i_* : \pi(X^a, x) \to \pi(X, x)$. Poiche' $\pi(X^a, x) = 0$ allora $\xi = 0$. Cio' prova (d). Infine osserviamo che (e) e' falsa, come mostra l'applicazione $x \in \mathbf{R} \to |x| \in \mathbf{R}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (c) e (d). ∎

Esercizio 3. *Un sottoinsieme K di $\mathbf{R}^n$ si dice strettamente convesso se per ogni coppia di punti $x, y \in K$, il segmento aperto $]x, y[:= \overrightarrow{xy} \backslash \{x, y\}$ di estremi x, y e' contenuto nell'interno di K. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se K e' convesso allora $\overline{K}$ e' convesso.

(b) Se $\overline{K}$ e' convesso allora K e' convesso.

(c) Se K e' strettamente convesso allora $\overline{K}$ e' strettamente convesso.

(d) Se $\overline{K}$ e' strettamente convesso allora K e' strettamente convesso.

Svolgimento. Fissato $t \in [0,1]$, sia $f_t : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la funzione continua definita ponendo:

$$f_t(x,y) := x + t(y-x).$$

Dire che K e' convesso equivale a dire che $f_t(K \times K) \subseteq K$ per ogni $t \in [0,1]$. Percio' se K e' convesso, tenuto conto che f_t e' continua e che in generale si ha $\overline{K} \times \overline{K} = \overline{K \times K}$, abbiamo:

$$f_t(\overline{K} \times \overline{K}) = f_t(\overline{K \times K}) \subseteq \overline{f_t(K \times K)} \subseteq \overline{K},$$

per ogni $t \in [0,1]$. Cio' prova che (a) e' vera.

Tutte le altre affermazioni invece sono false. Infatti se poniamo $K = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\} \setminus \{0\}$, e' charo che K non e' convesso, mentre lo e' la sua chiusura $\overline{K} = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\}$. Cio' prova che (b) e' falsa. Questo stesso esempio mostra che (d) e' falsa: infatti $\overline{K} = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\}$ e' strettamente convesso, mentre $K = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\} \setminus \{0\}$ non lo e' perche' non e' nemmeno convesso. Invece per provare che (c) e' falsa, possiamo considerare il quadrato $K = (0,1) \times (0,1)$ in $\mathbf{R}^2$, che e' strettamente convesso, la cui chiusura $\overline{K} = [0,1] \times [0,1]$ non lo e'.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 4. *Sia X lo spazio quoziente di un esagono in cui i lati sono identificati secondo la regola $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' omeomorfo ad una sfera.

(b) X e' omeomorfo ad un toro.

(c) X e' omeomorfo ad un piano proiettivo.

(d) X e' omeomorfo ad una bottiglia di Klein.

Svolgimento. Sia d il segmento che si ottiene unendo il vertice con cui parte a con quello con cui finisce b. Tagliamo l'esagono lungo d, stacchiamo il triangolo abd, e riattacchiamolo incollando a con a^{-1}. Otteniamo un nuovo quoziente dell'esagono, omeomorfo ad X, con identificazioni $dcbd^{-1}b^{-1}c^{-1}$.

Ora sia e il segmento che si ottiene unendo il vertice con cui parte c^{-1} con quello con cui finisce b^{-1}. Tagliamo l'esagono lungo e, stacchiamo il triangolo $c^{-1}b^{-1}e$, e riattacchiamolo incollando c con c^{-1}. Otteniamo un quoziente dell'esagono, omeomorfo ad X, con identificazioni $d^{-1}ede^{-1}b^{-1}b$. Quest'ultimo quoziente lo possiamo vedere come la somma connessa del toro $d^{-1}ede^{-1}$ con la sfera $b^{-1}b$. Percio' X e' omeomorfo ad un toro.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 5. *Si consideri l'omeomorfismo $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ definito ponendo $f(z) := -2z$. Sia $G = \{f^n \ : n \in \mathbf{Z}\}$ il gruppo generato da f per composizione. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo ad una sfera.

(b) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo ad un toro.

(c) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo ad un piano proiettivo.

(d) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo ad una bottiglia di Klein.

Svolgimento. Tramite l'omeomorfismo

$$\varphi : z \in \mathbf{C}^* \to \left(\frac{z}{\|z\|}, \log_2 \|z\| \right) \in S^1 \times \mathbf{R}, \qquad \varphi^{-1} : (x,y,t) \in S^1 \times \mathbf{R} \to 2^t(x,y) \in \mathbf{C}^*,$$

l'azione di G su $\mathbf{C}^*$ si identifica con l'azione di $\mathbf{Z}$ su $S^1 \times \mathbf{R}$ definita da:

$$(n,(x,y,t)) \in \mathbf{Z} \times \left(S^1 \times \mathbf{R}\right) \to ((-1)^n x, (-1)^n y, t+n) \in S^1 \times \mathbf{R}.$$

Allo scopo di identificare il quoziente $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$, innanzitutto osserviamo che $(x,y,t) \sim_{\mathbf{Z}} (-x,-y,t+1)$, e che $(x,y,t) \sim_{\mathbf{Z}} (x,y,t+2h)$, $h \in \mathbf{Z}$. Percio' possiamo sempre rappresentare una classe $[(x,y,t)]_{\sim_{\mathbf{Z}}}$ con un elemento $(x,y,t) \in \Gamma \times [-1,1]$, dove Γ denota il sottoinsieme di S^1 costituito dalle coppie del tipo (x,y), $y \geq 0$. Denotata con $\sim$ la relazione di equivalenza indotta da $\mathbf{Z}$ su $\Gamma \times [-1,1]$, abbiamo allora una naturale applicazione biiettiva

$$g : [(x,y,t)]_{\sim} \in (\Gamma \times [-1,1])/\sim \to [(x,y,t)]_{\sim_{\mathbf{Z}}} \in (S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}.$$

Per la proprieta' universale dello spazio quoziente, g e' continua. Inoltre, tenuto conto che la proiezione canonica $S^1 \times \mathbf{R} \to (S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ e' aperta, e' facile provare che $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ e' uno spazio di Hausdorff. Percio' g e' un omeomorfismo. Poiche' Γ, via proiezione ortogonale, e' omeomorfo a $[-1,1]$, allora $(S^1 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ e' omeomorfo al quoziente del quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$, sul quale la relazione $\sim$ viene a coincidere con quella che identifica $[-1,1] \times \{-1\}$ con $[-1,1] \times \{1\}$ in modo coerente, e che identifica, sempre in modo coerente, $\{-1\} \times [-1,0]$ con $\{1\} \times [0,1]$, e $\{-1\} \times [0,1]$ con $\{1\} \times [-1,0]$. Possiamo interpretare allora tale quoziente del quadrato, come il quoziente di un esagono, con identificazioni $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$. Abbiamo visto nell'esercizio precedente che tale spazio e' il toro.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, I appello, 2 Febbraio 2017 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri l'intervallo chiuso* $[0,1]$ *in* $\mathbf{R}$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia banale, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' compatto.*

(b) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia delle semirette sinistre aperte, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' compatto.*

(c) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia naturale, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' compatto.*

(d) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia di Sorgenfrey, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' compatto.*

(e) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia discreta, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' compatto.*

Svolgimento. Per il Teorema di Heine-Borel sappiamo che (c) e' vera. Allora devono essere vere anche (a) e (b) in quanto le topologie che appaiono in (a) e (b) sono meno fini di quella naturale.

Invece (d) e' falsa (e percio', per lo stesso motivo precedente, anche (e) e' falsa). Per provare cio' osserviamo che l'uguaglianza:

$$[0,1] = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1} \right) \right) \cup \{1\}$$

ci mostra un ricoprimento aperto di $[0,1]$ da cui non e' possibile estrarre un sottoricoprimento finito di $[0,1]$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b) e la (c). ■

Esercizio 2. *Sia* $f : X \to Y$ *una funzione tra spazi topologici. Si assuma che* f *sia iniettiva e continua. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X *e' di Hausdorff, allora* Y *e' di Hausdorff.*

(b) Se Y *e' di Hausdorff, allora* X *e' di Hausdorff.*

(c) Se X *e' connesso, allora* Y *e' connesso.*

(d) Se Y *e' connesso, allora* X *e' connesso.*

Svolgimento. Se X e' costituito da un solo punto x di uno spazio Y, allora X e' sia connesso che di Hausdorff, e l'inclusione di X in Y e' una funzione iniettiva e continua. Poiche' esistono spazi Y che non sono ne' di Hausdorff ne' connessi, allora (a) e (c) sono false. Anche (d) e' falsa, perche' un sottospazio di uno spazio connesso puo' non essere connesso.

Invece (b) e' vera. Infatti siano x ed x' due punti distinti di X. Allora sono distinti anche $f(x)$ ed $f(x')$ perche' f e' iniettiva. Se Y e' di Hausdorff allora esitono aperti disgiunti A ed A' di Y che separano $f(x)$ ed $f(x')$. Allora le antimmagini di A ed A' sono due aperti disgiunti di X (f e' continua) che separano x ed x'.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 3. *Per ogni* $n \in \mathbf{N}$, *sia* $B_n \subset \mathbf{R}^2$ *il grafico della funzione* $x \in [0,1] \to x/n \in \mathbf{R}$. *Sia*

$$B := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n, \quad A := \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}, \quad ed \quad X := A \cup B \subset \mathbf{R}^2.$$

Sia Y *lo spazio quoziente di* X *definito dalla relazione di equivalenza indotta dalla connessione per cammini. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Y consta di due elementi.

(b) Y ha la topologia discreta.

(c) Y e' connesso.

(d) Y e' connesso per cammini.

Svolgimento. Tutti i segmenti B_n hanno in comune l'origine, percio' B e' connesso per cammini. D'altra parte, lo stesso argomento con cui abbiamo studiato il pettine del topologo mostra che ogni cammino in X di punto iniziale $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e' costante. Ne consegue che X ha esattamente due componenti connesse per cammini: A e B. Percio' $Y = \{A, B\}$. Cio' prova che (a) e' vera. Sia ora $p : X \to Y$ la proiezione canonica. Poiche' $p^{-1}(\{B\}) = B$, e B non e' chiuso in X in quanto $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in \overline{B}$ ma $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \notin B$, allora il punto $\{B\}$ non e' chiuso in Y. Ne consegue che (b) e' falsa. Invece (d), e quindi (c), e' vera. Infatti consideriamo la funzione $f : [0, 1] \to Y$ definita ponendo:

$$f(t) := \begin{cases} A & \text{se } t = 0 \\ B & \text{se } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

L'unico aperto non banale di Y e' $\{B\}$, e $f^{-1}(B) = (0, 1]$ e' aperto. Quindi f e' continua ed e' un cammino che congiunge A con B.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (c) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia $S^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, e $D^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia $f : \mathbf{p} \in S^1 \to -\mathbf{p} \in S^1$, e $g : \mathbf{p} \in D^2 \to -\mathbf{p} \in D^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La funzione f e' omotopa all'identita' di S^1.

(b) La funzione f e' omotopa all'identita' di S^1 relativamente a $\{(1, 0)\}$.

(c) La funzione g e' omotopa all'identita' di D^2.

(d) La funzione g e' omotopa all'identita' di D^2 relativamente a $\{(0, 0)\}$.

Svolgimento. Possiamo portare l'applicazione identica di D^2 in g tramite rotazione. Piu' precisamente, consideriamo l'omotopia $F : D^2 \times [0, 1] \to D^2$ definita ponendo:

$$F(x, y, s) := (x \cos(\pi s) - y \sin(\pi s), x \sin(\pi s) + y \cos(\pi s)).$$

La funzione F e' ben posta (i.e. $F(x, y, s) \in D^2$), e' continua, $F(x, y, 0) = (x, y)$, ed $F(x, y, 1) = -(x, y)$. Osserviamo anche che $F(0, 0, s) = (0, 0)$. Quindi (c) e (d) sono vere. Lo stesso argomento prova che (a) e' vera, mentre evidentemente (b) e' falsa in quanto per una omotopia H tra f e l'identita' di S^1 si deve avere $H(1, 0, 0) = (-1, 0)$ e $H(1, 0, 1) = (1, 0)$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (c), e la (d). ■

Esercizio 5. *Sia $\mathbf{Z}_2 = \{\pm 1\}$ il gruppo moltiplicativo con due elementi, e $G := \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Si consideri l'azione del gruppo G sulla sfera $X := S^2 - \{N\}$ privata del polo nord, definita ponendo:*

$$((a, b), (x, y, z)) \in G \times X \to (ax, by, z) \in X.$$

Sia $Y := X/G$ lo spazio delle orbite. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Y e' connesso.

(b) Y e' connesso per cammini.

(c) Y e' compatto.

(d) Y e' omeomorfo ad un toro.

(e) Y e' omeomorfo ad $\mathbf{R}$.

Svolgimento. Tramite la proiezione stereografica

$$(x, y, z) \in S^2 - \{N\} \to \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \to \mathbf{R}^2$$

e la sua inversa

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \to \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(2x, 2y, x^2+y^2-1\right) \in S^2 - \{N\},$$

possiamo identificare Y con lo spazio delle orbite Z definito dall'azione:

$$((a, b), (x, y)) \in G \times \mathbf{R}^2 \to (ax, by) \in \mathbf{R}^2.$$

A sua volta possiamo vedere Z, a meno di omeomorfismi, come il prodotto $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_2$, dove il quoziente $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_2$ e' definito dall'azione

$$(a, x) \in \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{R} \to ax \in \mathbf{R}.$$

L'applicazione valore assoluto $x \in \mathbf{R} \to |x| \in [0, \infty)$ ci consente di identificare $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_2$ con $[0, +\infty)$ (cfr. III appello, 2 Luglio 2014, Esercizio 5, p. 7). Percio' in definitiva possiamo dire che Y e' omeomorfo a $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, cioe' al primo quadrante di $\mathbf{R}^2$. In particolare Y e' connesso per cammini (quindi connesso) perche' e' convesso, non e' compatto (quindi non puo' essere omeomorfo ad un toro) perche' non e' limitato, e non puo' essere omeomorfo ad $\mathbf{R}$ perche' togliere un punto al primo quadrante non ne altera necessariamente la connessione.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, II appello, 24 Febbraio 2017 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri l'intervallo chiuso* $[0,1]$ *in* $\mathbf{R}$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia banale, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' connesso.*

(b) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia delle semirette sinistre aperte, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' connesso.*

(c) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia naturale, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' connesso.*

(d) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia di Sorgenfrey, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' connesso.*

(e) Se $\mathbf{R}$ *ha la topologia discreta, allora il sottospazio* $[0,1]$ *e' connesso.*

Svolgimento. Per quanto studiato a lezione, sappiamo che (c) e' vera. Allora devono essere vere anche (a) e (b) in quanto le topologie che appaiono in (a) e (b) sono meno fini di quella naturale.

Invece (d) e' falsa (e percio', per lo stesso motivo precedente, anche (e) e' falsa). Infatti a lezione abbiamo visto che $\mathbf{R}$ con la topologia di Sorgenfrey e' uno spazio totalmente sconnesso.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b) e la (c). ■

Esercizio 2. *Si denoti con* $\mathcal{N}$ *la topologia naturale di* $\mathbf{R}$, *e con* $\mathcal{S}$ *la topologia di Sorgenfrey. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'applicazione $f : (\mathbf{R},\mathcal{N}) \times (\mathbf{R},\mathcal{N}) \to (\mathbf{R},\mathcal{N})$ *definita ponendo* $f(x,y) := x+y$ *e' continua.*

(b) L'applicazione $f : (\mathbf{R},\mathcal{N}) \times (\mathbf{R},\mathcal{N}) \to (\mathbf{R},\mathcal{S})$ *definita ponendo* $f(x,y) := x+y$ *e' continua.*

(c) L'applicazione $f : (\mathbf{R},\mathcal{S}) \times (\mathbf{R},\mathcal{S}) \to (\mathbf{R},\mathcal{N})$ *definita ponendo* $f(x,y) := x+y$ *e' continua.*

(d) L'applicazione $f : (\mathbf{R},\mathcal{S}) \times (\mathbf{R},\mathcal{S}) \to (\mathbf{R},\mathcal{S})$ *definita ponendo* $f(x,y) := x+y$ *e' continua.*

Svolgimento. Cominciamo col provare che (a) e' vera. Fissiamo un punto $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Sia I un intorno qualunque di $f(x_0,y_0)$, che possiamo assumere del tipo $I = (x_0+y_0-\epsilon, x_0+y_0+\epsilon)$, con $\epsilon > 0$. Allora $(x_0-\epsilon/2, x_0+\epsilon/2)\times(y_0-\epsilon/2, y_0+\epsilon/2)$ e' un intorno di (x_0,y_0) la cui immagine tramite f e' contenuta in I. Cio' prova che (a) e' vera. Ed allora e' anche vera (c) in quanto la topologia naturale e' meno fine di quella di Sorgenfrey.

Anche (d) e' vera. Infatti ora possiamo assumere I del tipo $I = [x_0+y_0, x_0+y_0+\epsilon)$, $\epsilon > 0$. Ed in tal caso $[x_0, x_0+\epsilon/2)\times[y_0, y_0+\epsilon/2)$ e' un intorno di (x_0,y_0) la cui immagine tramite f e' contenuta in I.

Infine osserviamo che (b) e' falsa. Infatti sia $I = [x_0+y_0, x_0+y_0+1)$. Ora qualunque intorno J di (x_0,y_0) nella topologia naturale deve contenere un quadrato del tipo $(x_0-\delta, x_0+\delta)\times(y_0-\delta, y_0+\delta)$ per un opportuno $\delta > 0$. Ne consegue che $f(J)$ non puo' essere contenuto in I in quanto $f(x_0-\delta/2, y_0-\delta/2) < x_0+y_0$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (c), e la (d). ■

Esercizio 3. *Sia* $\mathcal{S}$ *la topologia di Sorgenfrey per* $\mathbf{R}$. *Sia* X *il sottospazio di* $(\mathbf{R},\mathcal{S})$ *definito ponendo:*

$$X := \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : \, m,n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) X *e' compatto.*[1]

(b) X *e' di Hausdorff.*

[1] Ringrazio il Professor Emanuele Callegari che mi ha suggerito questa domanda.

(c) X e' connesso.

(d) X e' connesso per cammini.

Svolgimento. Sappiamo che la topologia di Sorgenfrey e' di Hausdorff, e che $(\mathbf{R}, \mathcal{S})$ e' totalmente sconnesso. Percio' (b) e' vera, mentre (c) e (d) sono false.

L'affermazione (a) e' vera. Per provare cio', e' sufficiente provare che il sottospazio

$$Y := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\} \subset (\mathbf{R}, \mathcal{S})$$

e' compatto. Infatti l'applicazione $f : (x, y) \in (\mathbf{R}, \mathcal{S}) \times (\mathbf{R}, \mathcal{S}) \to x+y \in (\mathbf{R}, \mathcal{S})$ e' continua (per l'esercizio precedente), e $f(Y \times Y) = X$.

Per provare che Y e' compatto, consideriamo una famiglia di aperti di $(\mathbf{R}, \mathcal{S})$ che ricopre Y:

$$Y \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Allora esiste un $\epsilon > 0$ ed un $i_0 \in I$ tale che $0 \in [0, \epsilon) \subseteq A_{i_0}$. In corrispondenza di tale i_0 allora esiste un n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $\frac{1}{n} \in A_{i_0}$. Quindi, a parte un numero finito di eccezioni, tutti gli elementi di Y stanno in A_{i_0}. Cio' implica che Y puo' essere ricoperto da un numero finito di A_i.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). ■

Esercizio 4. *Si consideri la circonferenza S^1 come sottoinsieme di $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$. La moltiplicazione complessa induce su S^1 una struttura di gruppo. Tale gruppo agisce su $S^3 \subset \mathbf{C}^2 \cong \mathbf{R}^4$ al seguente modo:*

$$(z, (z_1, z_2)) \in S^1 \times S^3 \to (zz_1, zz_2) \in S^3.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Lo spazio delle orbite S^3/S^1 e' compatto.

(b) Lo spazio delle orbite S^3/S^1 e' di Hausdorff.

(c) Lo spazio delle orbite S^3/S^1 e' connesso.

(d) Lo spazio delle orbite S^3/S^1 e' connesso per cammini.

Svolgimento. Sappiamo che S^3 e' compatto, e connesso per cammini. Percio' le affermazioni (a), (c) e (d) sono vere. E' vera anche (b). Per provare cio', sara' sufficiente provare che la proiezione canonica $p : S^3 \to S^3/S^1$ e' chiusa. Se C e' un chiuso in S^3, allora: $p^{-1}p(C) = \bigcup_{z \in S^1} z \cdot C$. Cioe' $p^{-1}p(C)$ coincide con l'immagine di $S^1 \times C$ tramite l'azione $\alpha : (z, (z_1, z_2)) \in S^1 \times S^3 \to (zz_1, zz_2) \in S^3$. Poiche' α e' continua, ed S^1 ed S^3 sono compatti e di Hausdorff, allora α e' chiusa, percio' $p^{-1}p(C) = \alpha(S^1 \times C)$ e' chiuso in S^3, e cio' equivale a dire che $p(C)$ e' chiuso.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 5. *Sia X il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai punti (x, y, z) che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' compatto.

(b) X e' di Hausdorff.

(c) X e' connesso.

(d) X e' contraibile.

(e) S^1 e' omeomorfo ad un retratto di deformazione di X.

Svolgimento. X e' di Hausdorff perche' e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. Poi osserviamo che la funzione

$$(r, \alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to (r \cos \alpha, r \sin \alpha, r) \in \mathbf{R}^3$$

ha per immagine proprio X. Quindi X e' connesso, e non e' compatto perche' non e' limitato, infatti possiede punti di quota r qualunque.

X e' anche contraibile. Infatti la funzione

$$F : X \times [0, 1] \to X, \quad F((x, y, z), s) := s(x, y, z)$$

e' una omotopia tra l'identita' di X e la funzione costante $(x, y, z) \in X \to (0, 0, 0) \in X$. Ed allora (e) e' falsa, perche' se S^1 fosse un retratto di deformazione di X, X avrebbe gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbf{Z}$ (per qualche punto base). Cio' non puo' accadere per uno spazio contraibile.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (c), e la (d). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, III appello, 11 Luglio 2017 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri lo spazio topologico $(X, \mathcal{A})$, dove $X = \{a, b, c, d, e\}$ e' un insieme costituito da cinque elementi, ed $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' compatto.

(b) X e' di Hausdorff.

(c) X e' connesso.

(d) $\overline{\{b, c, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

(e) $\overline{X - \{b, c, d\}} = \{a, e\}$.

(f) $\partial\{b, c, d\} = \{b, e\}$.

Svolgimento. Poiche' X e' finito, e' compatto. X non e' di Hausdorff perche' ogni intorno di c contiene d, percio' non e' possibile separare c e d. X non e' connesso perche' $\{a\}$ e' sia aperto che chiuso. La famiglia dei chiusi di X e' formata dagli insiemi $\mathcal{C} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d, e\}\}$. Percio' il piu' piccolo chiuso contenente $\{b, c, d\}$ e'$\{b, c, d, e\}$, ed il piu' piccolo chiuso contenente $X - \{b, c, d\}$ e' $\{a, b, e\}$. In particolare $\partial\{b, c, d\} = \overline{\{b, c, d\}} \cap \overline{X - \{b, c, d\}} = \{b, e\}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (d) e la (f). ■

Esercizio 2. *Per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ sia $\mathcal{U}(x)$ la famiglia degli intorni di x rispetto alla topologia naturale, e sia $\mathcal{U}(0)$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ contenenti insiemi del tipo $U - \Gamma$, dove U e' un intorno di 0 rispetto alla topologia naturale, e $\Gamma := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$. Sia $\mathcal{A}$ la topologia di $\mathbf{R}$ determinata dalla famiglia $\{\mathcal{U}(x)\}_{x \in \mathbf{R}}$, e sia $\mathcal{N}$ la topologia naturale. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La topologia $\mathcal{A}$ e' meno fine di $\mathcal{N}$, cioe' $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$.

(b) La topologia $\mathcal{N}$ e' meno fine di $\mathcal{A}$, cioe' $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$.

(c) Lo spazio $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ e' di Hausdorff.

Svolgimento. Sia U un aperto di $\mathbf{R}$ rispetto alla topologia naturale, passante per 0. Allora $U \supseteq U - \Gamma$, percio' U e' anche un aperto rispetto alla topologia $\mathcal{A}$. Ne consegue che $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$. A fortiori $\mathcal{A}$ e' di Hausdorff, tale essendo la topologia naturale.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Esercizio 3. *Sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ formato dai punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Sia Y il sottoinsieme di X formato dai punti (x, y, z) con $z \geq 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Per ogni $P, Q \in X$ esiste un omeomorfismo $f : X \to X$ che porta P in Q.

(b) Per ogni $P, Q \in X - \{(0, 0, 0)\}$ esiste un omeomorfismo $f : X \to X$ che porta P in Q.

(c) Per ogni $P, Q \in Y$ esiste un omeomorfismo $g : Y \to Y$ che porta P in Q.

(d) Per ogni $P, Q \in Y - \{(0, 0, 0)\}$ esiste un omeomorfismo $g : Y \to Y$ che porta P in Q.

Svolgimento. Sia U un qualunque intorno di $(0, 0, 0)$ in X. Allora $U - \{(0, 0, 0)\}$ non e' connesso, mentre per un intorno V sufficientemente piccolo di un punto $P \neq (0, 0, 0)$ di X, $V - \{P\}$ e' connesso. Percio' (a) e' falsa. Invece (b) e' vera. Infatti se $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sono due punti di X distinti dall'origine, allora z_1 e z_2 sono non nulli. Percio' posto $\rho := \frac{z_2}{z_1}$, la funzione

$$\varphi : (x, y, z) \in X \to (\rho x, \rho y, \rho z) \in X$$

e' un omeomorfismo che porta P in un punto alla stessa altezza di Q. Quindi $\varphi(P)$ e Q stanno sulla stessa circonferenza $C := X \cap \{z = z_2\}$. Con una opportuna rotazione di C possiamo portare $\varphi(P)$ in Q, ed e' chiaro che tale rotazione si estende ad un omeomorfismo su tutto X.

Per quel che riguarda Y, osserviamo che Y e' il grafico della funzione

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \to \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbf{R}.$$

Percio' Y e' omeomorfo ad $\mathbf{R}^2$, e per $\mathbf{R}^2$ la proprieta' (c) e' vera. Infatti dati due punti qualsiasi $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ in $\mathbf{R}^2$, la traslazione di passo $Q - P$ porta P in Q:

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \to (x + x_2 - x_1, y + y_2 - y_1) \in \mathbf{R}^2.$$

Poiche' (c) e' vera, lo e' a maggior ragione (d).

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (c), e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia* $\mathbf{R}$ *munito della topologia naturale. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $[0, 1]$ *e' un retratto di* $\mathbf{R}$.
(b) $(0, 1]$ *e' un retratto di* $\mathbf{R}$.
(c) $[0, 1)$ *e' un retratto di* $\mathbf{R}$.
(d) $(0, 1)$ *e' un retratto di* $\mathbf{R}$.

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che un retratto $Y \subseteq X$ di uno spazio di Hausdorff X deve essere un chiuso. Infatti se $r : X \to Y$ e' una retrazione, allora si ha

$$Y = f^{-1}((X \times Y) \cap \Delta_X),$$

dove $\Delta_X \subseteq X \times X$ e' la diagonale, ed f e' la funzione

$$f : x \in X \to (x, r(x)) \in X \times Y.$$

Percio' (b), (c) e (d) sono false. Invece (a) e' vera, come mostra la retrazione:

$$r : x \in \mathbf{R} \to r(x) \in [0, 1],$$

con

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 5. *Sia* $\mathcal{Z}$ *la topologia di Zariski su* $\mathbf{R}^2$. *Sia* X *il sottospazio di* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$ *costituito dai punti* (x, y) *che soddisfano l'equazione* $x^2 y + x^2 = y^2 + y$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X *e' compatto.*
(b) X *e' di Hausdorff.*
(c) X *e' connesso.*
(d) X *e' contraibile.*

Svolgimento. Osserviamo che l'equazione assegnata equivale all'equazione $(y - x^2)(y + 1) = 0$. Percio' X e' l'unione disgiunta di una retta L e di una parabola C. Quindi X non e' connesso, e non puo' essere contraibile. La topologia di Zariski induce sia su L che su C la topologia cofinita. Quindi sia L che C sono compatti, dunque lo e' anche la loro unione, cioe' X. Infine, la retta L, essendo infinita con la topologia cofinita, non e' di Hausdorff. Percio' non lo e' nemmeno X.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, IV appello, 1 Settembre 2017 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri lo spazio topologico $(X, \mathcal{A})$, dove $X = \{a, b, c, d, e\}$ e' un insieme costituito da cinque elementi, ed $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \{d\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, e\}\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\{b, c, d\}$ e' connesso.

(b) $\{c, d\}$ e' di Hausdorff.

(c) $\overline{\{b, d\}} = \{b, d, e\}$.

(d) L'interno di $\{b, c, d\}$ e' $\{d\}$.

(e) $\partial\{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$.

(f) $\{a, c\}$ e' chiuso in $\{a, c, d\}$.

Svolgimento. La topologia indotta su $\{b, c, d\}$ e' costituita da $\{b, c, d\}$, $\emptyset$, $\{d\}$, $\{c\}$, $\{c, d\}$ e $\{b, c\}$. Poiche' $\{b, c, d\}$ e' unione disgiunta di $\{d\}$ e $\{b, c\}$, deduciamo che $\{b, c, d\}$ non e' connesso.

La topologia indotta su $\{c, d\}$ e' la topologia discreta, percio' $\{c, d\}$ e' di Hausdorff.

La famiglia dei chiusi di X e' formata dagli insiemi

$$\mathcal{C} = \{X, \emptyset, \{d\}, \{b, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, e\}\}.$$

Ne consegue che il piu' piccolo chiuso di X contenente $\{b, d\}$ e' $\{b, d, e\}$. Cioe' $\overline{\{b, d\}} = \{b, d, e\}$.

Il piu' grande aperto di X contenuto in $\{b, c, d\}$ e' $\{d\}$. Percio' l'interno di $\{b, c, d\}$ e' $\{d\}$.

Poiche' $\partial\{b, c, d\} = \overline{\{b, c, d\}} \cap \overline{X - \{b, c, d\}}$ allora $\partial\{b, c, d\} = X \cap \overline{\{a, e\}} = \overline{\{a, e\}} = \{a, b, c, e\} \neq \{a, b, c, d\}$.

Infine osserviamo che $\{a, c\} = \{a, c, d\} \cap \{a, b, c, e\}$, percio' (f) e' vera in quanto $\{a, b, c, e\}$ e' chiuso in X.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (c), la (d) e la (f). ■

Esercizio 2. *Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme Y di X si dice denso in X se la chiusura di Y in X coincide con X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Sia Z un sottoinsieme di X. Se Z ed $X - Z$ sono densi in X allora $\partial Z = X$.

(b) Sia Z un sottoinsieme di X. Se $\partial Z = X$ allora Z ed $X - Z$ sono densi in X.

Svolgimento. Ricordiamo che per definizione $\partial Z = \overline{Z} - Z^\circ$ (Z° denota l'interno di Z in X). D'altra parte sappiamo che $X - Z^\circ = \overline{X - Z}$. Quindi $\partial Z = \overline{Z} \cap \overline{X - Z}$. Percio'

$$\partial Z = X \iff \overline{Z} \cap \overline{X - Z} = X \iff \overline{Z} = \overline{X - Z} = X.$$

In conclusione, entrambe le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 3. *Sia X uno spazio topologico. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' contraibile allora ogni funzione continua $f : X \to Y$ e' omotopa ad una funzione costante.

(b) Se ogni funzione continua $f : X \to Y$ e' omotopa ad una funzione costante allora X e' contraibile.

(c) Se X e' contraibile allora ogni funzione continua $f : Y \to X$ e' omotopa ad una funzione costante.

(d) Se ogni funzione continua $f : Y \to X$ e' omotopa ad una funzione costante allora X e' contraibile.

Svolgimento. Ricordiamo che uno spazio X si dice contraibile se e' omotopicamente equivalente ad un punto. Sappiamo anche che cio' equivale a dire che $\mathrm{id}_X : X \to X$ e' omotopa ad una funzione costante.

Ora, se ogni funzione continua del tipo $f : X \to Y$, o del tipo $f : Y \to X$, e' omotopa ad una funzione costante, in particolare lo e' anche la funzione identita' $\mathrm{id}_X : X \to X$. Ne consegue che (b) e (d) sono vere.

Sono vere anche le rimanenti affermazioni. Infatti se X e' contraibile, fissiamo una funzione costante $\gamma : X \to X$ omotopa alla funzione $\mathrm{id}_X : X \to X$. Sia $f : X \to Y$ una qualunque funzione continua. Allora, poiche' composte di funzioni omotope sono ancora omotope, si ha che $f \circ \gamma$ e' omotopa ad $f \circ \mathrm{id}_X$. Ma $f \circ \gamma$ e' una funzione costante, ed $f \circ \mathrm{id}_X = f$. Quindi $f : X \to Y$ e' omotopa ad una funzione costante. Cio' prova che (a) e' vera.

In modo analogo si prova che (c) e' vera.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 4. *Sia X lo spazio delle matrici quadrate 2×2, identificato con $\mathbf{R}^4$. Sia G il sottospazio di X costituito dalle matrici invertibili, S il sottospazio di X costituito dalle matrici con determinante uguale ad 1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) G e' aperto in X.

(b) G e' chiuso in X.

(c) S e' aperto in X.

(d) S e' chiuso in X.

Svolgimento. Sia C il complementare di G in X. Allora C e' costituito dalle matrici 2×2 con determinante nullo, cioe' dalle matrici del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

con $ad - bc = 0$. Poiche' la funzione

$$f : A \in X \to \det A = ad - bc \in \mathbf{R}$$

e' continua, ne consegue che $C = f^{-1}(0)$ e' chiuso in X. Percio' (a) e' vera, e (b) e' falsa in quanto X e' connesso. Invece $S = f^{-1}(1)$. Quindi S e' chiuso in X, e percio' (d) e' vera, e (c) e' falsa.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 5. *Sia X lo spazio delle matrici quadrate 2×2, identificato con $\mathbf{R}^4$. Sia O il sottospazio di X costituito dalle matrici ortogonali. Sia x_0 il punto di O corrispondente alla matrice unitaria $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) O e' compatto.

(b) O e' connesso.

(c) O e' di Hausdorff.

(d) $\pi(O, x_0) = \{1\}$.

Svolgimento. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

una matrice ortogonale. Poiche' il vettore (a, c) ha lunghezza 1, allora, per qualche $\alpha \in [0, 2\pi]$, possiamo scrivere

$$(a, c) = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Per la rimanente colonna (b, d), dovendo essere anch'essa di lunghezza 1 ed ortogonale ad (a, c), ci sono solo due possibilita':

$$(b, d) = (-\sin\alpha, \cos\alpha) \quad \text{oppure} \quad (b, d) = (\sin\alpha, -\cos\alpha).$$

Quindi possiamo riguardare O come l'unione dei seguenti insiemi:

$$O = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi] \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osserviamo che nel primo insieme ci sono le matrici ortogonali con determinante uguale ad 1, nell'altro quelle con determinante uguale a -1. Percio' l'unione e' disgiunta. D'altra parte abbiamo le funzioni continue e suriettive:

$$\alpha \in [0, 2\pi] \to \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$\alpha \in [0, 2\pi] \to \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Cio' prova che i due insiemi con cui abbiamo ripartito O sono compatti, in particolare chiusi. Quindi O e' compatto, e non e' connesso. Inoltre la prima delle due funzioni prova che il primo dei due insiemi, chiamiamolo R, a cui appartiene x_0, e' omeomorfo ad S^1. Poiche' ogni cammino chiuso in O di punto base x_0 deve essere contenuto in R, ne consegue che[2]

$$\pi(O, x_0) \cong \pi(R, x_0) \cong \pi(S^1, x_0) \cong \mathbf{Z}.$$

Infine osserviamo che, essendo O un sottospazio di $\mathbf{R}^4$, e' chiaro che O e' di Hausdorff.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (c). $\blacksquare$

[2] Piu' precisamente, denotiamo con S l'altro insieme di matrici, quello delle matrici con determinante uguale a -1. L'applicazione $r : O = R \cup S \to R$, definita incollando l'applicazione identica di R con la funzione costante $x \in S \to x_0 \in R$, e' una retrazione di O su R. Cioe' $r \circ i = \mathrm{id}_R$. Passando alle mappe sul gruppo fondamentale, deduciamo che $r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi(R, x_0)}$. Percio' l'omomorfismo $i_* : \pi(R, x_0) \to \pi(O, x_0)$ e' iniettivo. Ed e' anche suriettivo perche', come gia' osservato, ogni cammino chiuso in O di punto base x_0 deve essere contenuto in R.

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, I appello, 23 Gennaio 2018 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia $X = \{a, b\}$ un insieme costituito da due elementi. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Ci sono esattamente 4 topologie distinte con sostegno X.

(b) Ci sono esattamente 2 topologie distinte con sostegno X per le quali X e' compatto.

(c) Ci sono esattamente 2 topologie distinte con sostegno X per le quali X e' di Hausdorff.

(d) Ci sono esattamente 2 topologie distinte con sostegno X per le quali X e' connesso.

(e) Ci sono esattamente 3 topologie distinte con sostegno X per le quali X e' connesso per cammini.

(f) A meno di omeomorfismi, ci sono esattamente 3 topologie con sostegno X.

Svolgimento. Le topologie possibili per X sono:

$$\mathcal{A}_1 = \{X, \emptyset\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}\}, \quad \mathcal{A}_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}, \quad \mathcal{A}_4 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}.$$

Tutti gli spazi $(X, \mathcal{A}_i)$ sono compatti, perche' hanno un numero finito di aperti. Poiche' in uno spazio di Hausdorff i singoli punti formano chiusi, l'unico spazio di Hausdorff e' $(X, \mathcal{A}_4)$ (che e' quello discreto). Tale spazio e' anche l'unico a non essere connesso per cammini. Infatti non e' connesso ($X = \{a\} \cup \{b\}$ e' una sconnessione in $(X, \mathcal{A}_4)$), e gli altri spazi sono connessi per cammini. Per provare quest'ultima affermazione, denotiamo con $f : [0, 1] \to X$ la mappa:

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ b & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Allora f e' un cammino in $(X, \mathcal{A}_1)$, ed anche in $(X, \mathcal{A}_2)$, che congiunge a con b. Percio' $(X, \mathcal{A}_1)$ ed $(X, \mathcal{A}_2)$ sono connessi per cammini. Lo e' anche $(X, \mathcal{A}_3)$, perche' e' omeomorfo ad $(X, \mathcal{A}_2)$ tramite la biiezione che scambia a con b. Infine osserviamo che $(X, \mathcal{A}_2)$ ed $(X, \mathcal{A}_3)$ sono gli unici spazi ad essere omeomorfi tra loro, in quanto gli altri hanno un numero di aperti differente.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (e) e la (f). ■

Esercizio 2. *Sia A un aperto in $\mathbf{R}$, munito della topologia naturale. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) A e' una unione disgiunta di una famiglia al piu' numerabile di intervalli aperti.

(b) A e' una unione disgiunta di una famiglia di intervalli aperti.

(c) A e' una unione di intervalli aperti.

Svolgimento. Sia E una componente connessa di A. Sia $x \in E$ un punto qualsiasi. Poiche' A e' aperto, esiste un intervallo I aperto di centro x contenuto in A. Poiche' I e' connesso, ed E, tra tutti i sottospazi connessi di A passanti per x, e' il piu' grande, allora I e' contenuto in E. Cio' prova che E e' un aperto, ed essendo connesso, e' un intervallo aperto. Quindi le componenti connesse di A sono intervalli aperti. Poiche' A e' unione disgiunta delle sue componenti connesse, allora A e' una unione disgiunta di una famiglia di intervalli aperti. Se denotiamo con

$$\mathcal{F} := \{E : E \text{ e' una componente connessa di } A\}$$

tale famiglia, per ogni $E \in \mathcal{F}$ possiamo scegliere un numero razionale $q_E \in E$. L'applicazione $E \in \mathcal{F} \to q_E \in \mathbf{Q}$ e' iniettiva, percio' $\mathcal{F}$ e' al piu' numerabile.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 3. *Sia $G := \{1, \sigma\}$ il gruppo simmetrico su due elementi, e sia $G \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'azione definita ponendo $\sigma \cdot (x, y) = (y, x)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{R}^2/G$ *e' omeomorfo ad* $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$.

(b) $\mathbf{R}^2/G$ *e' omeomorfo a* $S^1 \times S^1$.

(c) $\mathbf{R}^2/G$ *e' compatto.*

(d) $\mathbf{R}^2/G$ *e' connesso.*

Svolgimento. Andiamo a provare che $\mathbf{R}^2/G$ e' omeomorfo ad $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$. Ne seguira' che (b) e (c) sono false, perche' $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$ non e' compatto, e che (d) e' vera.

Per provare la (a), denotiamo con $X \subset \mathbf{R}^2$ il semipiano costituito dalle coppie (x, y) con $x \leq y$. Sia $i : (x, y) \in X \to (x, y) \in \mathbf{R}^2$ l'applicazione di inclusione, e $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/G$ la proiezione canonica. Osserviamo che poiche' X e' un chiuso di $\mathbf{R}^2$ allora i e' una mappa chiusa. Lo e' anche la proiezione p in quanto $\mathbf{R}^2$ e' un G-spazio, e G e' un gruppo finito. Ne consegue che l'applicazione composta $p \circ i : X \to \mathbf{R}^2/G$ e' chiusa. Poiche' e' anche biiettiva e continua, allora e' un omeomorfismo. A questo punto la (a) segue osservando che la rotazione antioraria di $\mathbf{R}^2$ di angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, porta $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$ in X:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbf{R} \times [0, +\infty) \to \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in X.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione definita ponendo $f(x, y, z) := (xy, xz, yz, y^2 - z^2)$. E sia S^2 la sfera costituita dai punti $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $f(S^2)$ *e' omeomorfo ad* S^2.

(b) $f(S^2)$ *e' omeomorfo ad un toro.*

(c) $f(S^2)$ *e' omeomorfo al piano proiettivo.*

(d) $f(S^2)$ *e' omeomorfo alla bottiglia di Klein.*

Svolgimento. Sia $\varphi : S^2 \to f(S^2)$ la restrizione di f sulla sfera. Osserviamo che $\varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z')$ se e solo se $(x', y', z') = \pm(x, y, z)$.[3] Cioe' il nucleo di φ coincide con l'antipodalita' sulla sfera. Sappiamo che cio' implica l'esistenza di una mappa biiettiva e continua $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \to \varphi(S^2)$, che e' un omeomorfismo in quanto φ e' una mappa chiusa. Tenuto conto del Teorema di classificazione delle superfici, possiamo dire che (c) e' vera, e tutte le altre affermazioni no.

In conclusione, l'unica affermazioni vera e' la (c). ■

Esercizio 5. *Uno spazio topologico $(X, \mathcal{A})$ si dice "compatto massimale" se e' compatto, e non esiste una topologia $\mathcal{B}$ per X tale che $(X, \mathcal{B})$ sia compatto, con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

---

[3] Infatti, poiche' le componenti di $f(x, y, z)$ sono polinomi omogenei di secondo grado, e' chiaro che se $(x', y', z') = \pm(x, y, z)$, allora $\varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z')$. Viceversa, supponiamo che $\varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z')$. Assumiamo innanzitutto che x, y, z siano non nulli. Poiche' $xy = x'y'$, $xz = x'z'$, e $yz = y'z'$ allora $y'/y = y/y'$. Quindi $y' = \pm y$, da cui $(x', y', z') = \pm(x, y, z)$. Supponiamo ora $x = 0$. Allora $x'y' = 0$. Non puo' essere $x' \neq 0$, altrimenti $y' = z' = 0$, da cui $yz = 0$ e $y^2 - z^2 = 0$. Allora si avrebbe $x = y = z = 0$, contro il fatto che $(x, y, z) \in S^2$. Percio' se $x = 0$ deve essere $x' = 0$. Ora se $x' = 0$ allora $y^2 + z^2 = 1 = y'^2 + z'^2$. Poiche' $y^2 - z^2 = y'^2 - z'^2$, ne consegue $y' = \pm y$, da cui $(x', y', z') = \pm(x, y, z)$. Se invece $y = 0$, anche $y' = 0$ (altrimenti $z' = 0$, e, potendo assumere $x \neq 0$, seguirebbe $z = 0$, da cui $y^2 = y'^2$, il che non e' possibile se $y' \neq 0$). Poiche' $y' = 0$ allora $z^2 = z'^2$, quindi $z' = \pm z$, e percio' $(x', y', z') = \pm(x, y, z)$. Infine esaminiamo il caso $z = 0$. Potendo assumere $xy \neq 0$, abbiamo $x'y' \neq 0$. Quindi $z' = 0$, percio' $y^2 = y'^2$, e si ha $y' = \pm y$ e dunque $(x', y', z') = \pm(x, y, z)$.

(a) Se in uno spazio topologico compatto S ogni sottospazio compatto e' chiuso, allora S e' compatto massimale.

(b) Se S e' uno spazio compatto di Hausdorff, allora S e' compatto massimale.

(c) Lo spazio $([0,1],\mathcal{Z})$, con la topologia $\mathcal{Z}$ indotta dalla topologia di Zariski di $\mathbf{R}$, e' compatto massimale.

Svolgimento. Supponiamo che $(S,\mathcal{A})$ sia uno spazio compatto non massimale, e sia $\mathcal{B}\supset\mathcal{A}$ una topologia per S strettamente piu' fine di $\mathcal{A}$, tale che $(S,\mathcal{B})$ sia compatto. Sia $A\in\mathcal{B}\backslash\mathcal{A}$. Posto $C:=S\backslash A$, allora C e' un chiuso in $(S,\mathcal{B})$, ma non lo e' in $(S,\mathcal{A})$. Ora denotiamo con $\mathcal{A}_C$ la topologia indotta su C da $\mathcal{A}$, e con $\mathcal{B}_C$ quella indotta da $\mathcal{B}$. Poiche' C e' chiuso in $(S,\mathcal{B})$, allora $(C,\mathcal{B}_C)$ e' compatto. Necessariamente lo e' anche $(C,\mathcal{A}_C)$, poiche' $\mathcal{A}_C\subseteq\mathcal{B}_C$. Percio' C e' un sottospazio di $(S,\mathcal{A})$, con topologia indotta compatta, ma non e' un chiuso in $(S,\mathcal{A})$. Questo argomento dimostra che se S non e' compatto massimale, devono esserci sottospazi compatti non chiusi. In altre parole, la proprieta' (a) e' vera. Ne consegue che e' vera anche la proprieta' (b) perche' i compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi. Invece la proprieta' (c) e' falsa. Infatti sappiamo che la topologia di Zariski in $\mathbf{R}$ coincide con la topologia cofinita. La topologia cofinita induce su $[0,1]$ la topologia cofinita, percio' $([0,1],\mathcal{Z})$ e' uno spazio compatto, ma non e' massimale perche' $[0,1]$ e' compatto anche con la topologia naturale $\mathcal{N}$, e $\mathcal{Z}\subset\mathcal{N}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, II appello, 19 Febbraio 2018 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Si consideri lo spazio topologico* $(X, \mathcal{A})$*, dove* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *e' un insieme costituito da cinque elementi, ed* $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, c, d, e\}\}$*. Posto* $Y = \{a, b, c, d\}$*, sia* $\mathcal{A}_Y$ *la topologia indotta da* $\mathcal{A}$ *su* Y*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{A}_Y = \{Y, \emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}, \{a, c, d\}\}$.

(b) $\mathcal{A}_Y = \{Y, \emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$.

(c) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ *e' chiuso in* $Y \times Y$.

(d) La chiusura di Y *in* X *e'* X.

(e) L'interno di Y *in* X *coincide con* $\{b\}$.

(f) Il bordo di Y *in* X *coincide con* $\{a, c, d, e\}$.

Svolgimento. Intersecando ad uno ad uno gli aperti di X con Y, si vede che la topologia indotta su Y e' quella che appare in (a). Il complementare in Y del punto a non e' un aperto in Y. Percio' $\{a\}$ non e' chiuso in Y. Allora Y non e' di Hausdorff, dunque la diagonale di Y non puo' essere chiusa in $Y \times Y$. Osserviamo ora che la famiglia dei chiusi di X e':

$$X, \emptyset, \{a, c, d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{b\}.$$

Deduciamo che il piu' piccolo chiuso di X contenente Y e' X, percio' $\overline{Y} = X$. Il piu' grande aperto di X contenuto in Y e' $\{b\}$. Dunque l'interno di Y in X coincide con $\{b\}$. Infine osserviamo che

$$\partial Y = \overline{Y} \cap (\overline{X - Y}) = \overline{X - Y} = \overline{\{e\}} = \{a, c, d, e\}.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (d), la (e), e la (f). ■

Esercizio 2. *Sia* X *uno spazio topologico. Per ogni* $x \in X$*, sia* $\mathcal{U}(x)$ *la famiglia degli intorni di* x*, e sia* $\mathcal{C}(x)$ *la famiglia degli intorni chiusi di* x*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X *e' di Hausdorff allora, per ogni* $x \in X$*, si ha* $\bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U = \{x\}$.

(b) Se per ogni $x \in X$ *si ha* $\bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} U = \{x\}$*, allora* X *e' di Hausdorff.*

(c) Se X *e' di Hausdorff allora, per ogni* $x \in X$*, si ha* $\bigcap_{U \in \mathcal{C}(x)} U = \{x\}$.

(d) Se per ogni $x \in X$ *si ha* $\bigcap_{U \in \mathcal{C}(x)} U = \{x\}$*, allora* X *e' di Hausdorff.*

Svolgimento. Supponiamo che X sia di Hausdorff, e siano x, y due punti di X distinti. Sappiamo allora che esistono un intorno U di x ed un intorno V di y, disgiunti. Sappiamo anche che possiamo assumere U e V aperti. In tal caso, $X \backslash V$ e' un chiuso contenente U, a cui y non appartiene. Quindi $X \backslash V$ e' un intorno chiuso di x a cui y non appartiene. Cio' prova che (c) e' vera, a maggior ragione lo e' (a). Supponiamo ora che, per ogni x, l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x sia costituita solo dal punto x. Siano x, y due punti distinti di X. Allora esiste un intorno chiuso U di x, a cui y non appartiene. Quindi $X \backslash U$ e' un intorno di y, disgiunto da U. Cio' prova che X e' di Hausdorff. Cio' prova che anche l'affermazione (d) e' vera. Invece (b) e' falsa. Infatti, se X e' uno spazio cofinito infinito, allora sappiamo che X non e' di Hausdorff. Tuttavia, per ogni $x \in X$, tutti gli intorni di x si intersecano solo nel punto x. Infatti se y e' diverso da x, $X \backslash \{y\}$ e' un intorno di x a cui y non appartiene.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (c), e (d). ■

Esercizio 3. *Sia* X *lo spazio quoziente di un ottagono in cui i lati sono identificati secondo la regola* $abcadbd^{-1}c^{-1}$*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' omeomorfo alla somma connessa di due piani proiettivi.

(b) X e' omeomorfo alla somma connessa di tre piani proiettivi.

(c) X e' omeomorfo alla somma connessa di quattro piani proiettivi.

(d) X e' omeomorfo alla somma connessa di due piani proiettivi e di un toro.

Svolgimento. Sia e il segmento che si ottiene unendo il vertice con cui parte a, con quello con cui finisce b. Tagliamo l'ottagono lungo e, stacchiamo il triangolo abe. Questa operazione produce il triangolo abe ed un poligono M di sette lati. Ora ribaltiamo il triangolo abe rispetto al lato e, ed attacchiamo il lato a del nuovo triangolo con il lato a di M. Si ottiene un ottagono, con identificazioni date da $ecebdb^{-1}d^{-1}c^{-1}$, cioe' da $c^{-1}ecebdb^{-1}d^{-1}$, da cui riconosciamo che X e' la somma connessa di una bottiglia di Klein e di un toro. Tenuto conto che la bottiglia di Klein e' la somma connessa di due piani proiettivi, e che un piano proiettivo sommato ad un toro equivale a tre piani proiettivi, segue che (c) e (d) sono vere, e le rimanenti affermazioni sono false.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (c) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia X uno spazio topologico infinito, con la topologia cofinita. Sia Y un sottospazio non vuoto di X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se Y e' connesso, allora Y e' infinito oppure e' un singleton.

(b) Se Y e' infinito oppure e' un singleton, allora Y e' connesso.

Svolgimento. La topologia indotta su Y e' ancora quella cofinita. Percio', se Y e' finito, ha la topologia discreta. Allora se Y e' connesso e finito, deve essere un singleton. Viceversa, se Y e' infinito, non puo' essere unione di due chiusi non banali, perche' nella topologia cofinita i chiusi non banali sono insiemi finiti.

In conclusione, entrambe le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 5. *Si consideri l'omeomorfismo $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ definito ponendo $f(z) = iz$ ($\mathbf{C}^* = \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$). Sia $G = \{f^n : n \in \mathbf{Z}\}$ il gruppo generato da f per composizione. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo a $\mathbf{C}^*$.

(b) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo a $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$.

(c) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo a $[0,1] \times [0,1]$.

(d) $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo a $[0,1] \times \{0,1\}$.

Svolgimento. Si osservi che G e' un gruppo finito, isomorfo al gruppo $H = \{i, -1, -i, 1\}$ delle radici quarte dell'unita'.

Tramite l'omeomorfismo

$$\varphi : z \in \mathbf{C}^* \to \left(\frac{z}{\|z\|}, \log\|z\|\right) \in S^1 \times \mathbf{R}, \qquad \varphi^{-1} : (x,y,t) \in S^1 \times \mathbf{R} \to e^t(x,y) \in \mathbf{C}^*,$$

l'azione di G su $\mathbf{C}^*$ si identifica con l'azione di H su $S^1 \times \mathbf{R}$ definita da:

$$(h,(x,y,t)) \in H \times \left(S^1 \times \mathbf{R}\right) \to (h \cdot (x+iy), t) \in S^1 \times \mathbf{R}.$$

Percio' $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo al prodotto $(S^1/H)\times\mathbf{R}$, dove S^1/H e' lo spazio delle orbite definito dall'azione di H su S^1 data dalla moltiplicazione di numeri complessi. Allo scopo di identificare S^1/H, sia Γ l'arco di S^1 in comune con il primo quadrante, cioe' l'arco chiuso di estremi $(1,0)$, $(0,1)$. L'applicazione $p \circ i : \Gamma \to S^1/H$, composta dall'inclusione $i : \Gamma \to S^1$ con la proiezione canonica $p : S^1 \to S^1/H$, e' chiusa, tali essendo le mappe i e p. Poiche' $p \circ i$ e' continua e suriettiva[4], allora sappiamo che S^1/H e' omeomorfo al quoziente di Γ definito dal nucleo di $p \circ i$. D'altra parte il nucleo della mappa $p \circ i$ identifica solo gli estremi di Γ, percio' S^1/H e' omeomorfo ad S^1. Ne consegue che $\mathbf{C}^*/G$ e' omeomorfo ad $S^1 \times \mathbf{R}$, che a sua volta e' omeomorfo sia a $\mathbf{C}^*$ che a $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$. Le affermazioni (c) e (d) sono false perche' $\mathbf{C}^*$ non e' compatto, ed e' connesso.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). ■

[4]Moltiplicare un numero complesso $z = (x, y)$ per i equivale a ruotare il vettore (x, y) di $90°$ in senso antiorario. Percio' ogni classe di S^1/H puo' essere rappresentata da un punto in Γ. Per lo stesso motivo, i punti di Γ sono tutti non equivalenti rispetto all'azione di H, ad eccezione degli estremi.

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, III appello, 15 Giugno 2018 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia $X = \{a, b, c\}$ un insieme costituito da 3 elementi. Sia μ il numero di topologie $\mathcal{A}_X$ per X per le quali $(X, \mathcal{A}_X)$ non e' connesso, a meno di omeomorfismi. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mu = 1$.

(b) $\mu = 2$.

(c) $\mu = 3$.

(d) $\mu = 4$.

(e) $\mu = 5$.

Svolgimento. Supponiamo che $(X, \mathcal{A}_X)$ non sia connesso. Allora una sconnessione per X deve essere del tipo $X = A_1 \cup A_2$, con A_1 ed A_2 aperti disgiunti, A_1 un sottoinsieme di X con un solo elemento, ed A_2 un sottoinsieme di X con due elementi, cioe' del tipo $X = \{a\} \cup \{b, c\}$. Quindi in $\mathcal{A}_X$ devono esserci almeno quattro elementi:

$$\mathcal{A}_X \supseteq \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\} =: \mathcal{A}_1.$$

Si osservi che $\mathcal{A}_1$ e' gia' una topologia, non connessa, e che, a meno di permutare le lettere a, b, c, cioe' a meno di omeomorfismi, e' l'unica topologia non connessa con quattro elementi per X. Se in $\mathcal{A}_X$ ci fossero altri aperti, necessariamente ci dovrebbe essere un altro singleton ed un altro sottoinsieme con due elementi, per esempio:

$$\mathcal{A}_X \supseteq \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}\} =: \mathcal{A}_2.$$

Come prima, anche $\mathcal{A}_2$ e' una topologia, non connessa, l'unica, a meno di omeomorfismi, con sei elementi e non connessa. Se in $\mathcal{A}_X$ ci fossero altri aperti ancora, allora $\mathcal{A}_X$ sarebbe tutto l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$, cioe' la topologia discreta. Quindi, a meno di omeomorfismi, le topologie non connesse per X sono $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, e $\mathcal{P}(X)$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ∎

Esercizio 2. *Sia $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$ la topologia di $\mathbf{R}$ formata da $\mathbf{R}$, l'insieme vuoto, e dagli intervalli del tipo $(-a, a)$, al variare di $a \in \mathbf{R}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $(\mathbf{R}, \mathcal{A}_{\mathbf{R}})$ *e' compatto.*

(b) $(\mathbf{R}, \mathcal{A}_{\mathbf{R}})$ *e' di Hausdorff.*

(c) $(\mathbf{R}, \mathcal{A}_{\mathbf{R}})$ *e' connesso.*

(d) $(\mathbf{R}, \mathcal{A}_{\mathbf{R}})$ *e' connesso per cammini.*

Svolgimento. Si osservi che la topologia $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$ e' meno fine di quella naturale. Percio' (c) e (d) sono vere, in quanto $\mathbf{R}$ con la topologia naturale e' connesso e connesso per cammini, e tali proprieta' sono proprieta' che passano a topologie meno fini. Invece (a) e (b) sono false. Infatti il ricoprimento aperto di $(\mathbf{R}, \mathcal{A}_{\mathbf{R}})$

$$\mathbf{R} = \bigcup_{a \in \mathbf{R}} (-a, a)$$

non ammette un sottoricoprimento finito, e due aperti qualsiasi (non vuoti) in $(\mathbf{R}, \mathcal{A}_{\mathbf{R}})$ non possono essere disgiunti, dovendo avere il punto 0 in comune.

In conclusione, le affermazioni vere sono (c), e (d). ∎

Esercizio 3. *Sia X lo spazio delle matrici quadrate 2×2, identificato con $\mathbf{R}^4$. Sia Y il sottospazio di X costituito dalle matrici triangolari superiori, con determinante uguale ad 1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Y e' una 3-varieta'.
(b) Y e' una 2-varieta'.
(c) Y e' una superficie.
(d) Y e' connesso per cammini.

Svolgimento. Il generico elemento y di Y e' una matrice della forma:

$$y = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Percio' possiamo identificare Y come il sotospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai punti (a, b, c) tali che $ac = 1$. Se denotiamo con Z l'iperbole di equazione $ac = 1$ nel piano $b = 0$, allora abbiamo $Y = Z \times \mathbf{R}$. Poiche' Z e' una 1-varieta', ne consegue che Y e' una 2-varieta'. Poiche' Z non e' connessa, non lo e' neanche Y. Percio' Y non e' una superficie, e non e' connesso per cammini.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 4. *Sia $f : X \to Y$ una applicazione tra due spazi topologici, e si assuma che Y abbia la topologia cofinita. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se f e' continua, allora $f^{-1}(y)$ e' un chiuso per ogni $y \in Y$.
(b) Se, per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ e' un chiuso, allora f e' continua.
(c) Se $X = \mathbf{R}$ ed f e' iniettiva, allora f e' continua.
(d) Se $X = \mathbf{R}$ ed f e' continua, allora f e' iniettiva.
(e) Se $X = \mathbf{R}$ con la topologia delle semirette sinistre aperte ed f e' biiettiva, allora f e' continua.
(f) Se $X = \mathbf{R}$ con la topologia delle semirette sinistre aperte ed f e' continua, allora f e' biiettiva.

Svolgimento. Sappiamo che una funzione e' continua se e solo se le antiimmagini dei chiusi sono dei chiusi. Se Y ha la topologia cofinita, i chiusi sono i sottoinsiemi di Y costituiti da un numero finito di punti (a parte Y). Percio' (a) e (b) sono vere. Anche (c) e' vera, perche' se f e' iniettiva allora, per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ e' un sottoinsieme finito di $\mathbf{R}$, che e' un chiuso nella topologia naturale. Cio' non e' vero nella topologia delle semirette sinstre aperte, percio' (e) e' falsa. Lo sono anche (d) ed (f) perche' le funzioni costanti sono sempre continue.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b), e la (c). ■

Esercizio 5. *Siano $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Z}$ la topologia naturale e quella di Zariski di $\mathbf{R}^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathbf{R} \times \{0\}$, con la topologia indotta, e' un retratto di $(\mathbf{R}^2, \mathcal{N})$.
(b) $\mathbf{R} \times \{0\}$, con la topologia indotta, e' un retratto di $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$.

Svolgimento. Si considerino le seguenti funzioni:

$$i : (x, 0) \in \mathbf{R} \times \{0\} \to (x, 0) \in \mathbf{R}^2, \qquad j : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \to (x, 0) \in \mathbf{R} \times \{0\}.$$

Si ha $j \circ i = \mathrm{id}_{\mathbf{R} \times \{0\}}$. Se su $\mathbf{R}^2$ mettiamo la topologia naturale, e' chiaro che j e' continua. Percio' (a) e' vera. E' vera anche (b) poiche' j e' continua anche se su $\mathbf{R}^2$ mettiamo la topologia di Zariski. Infatti, in tal caso, la topologia indotta su $\mathbf{R} \times \{0\}$ e' quella cofinita. Percio' per provare che j e' continua e' sufficiente provare che $j^{-1}(x_0, 0)$ e' un chiuso in $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$, per ogni $(x_0, 0) \in \mathbf{R} \times \{0\}$ (cfr. con l'esercizio precedente). E cio' e' vero perche' $j^{-1}(x_0, 0)$ e' la retta $x - x_0 = 0$, che, per definizione di topologia di Zariski di $\mathbf{R}^2$, e' un chiuso in $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$.

In conclusione, entrambe le affermazioni sono vere. ■

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, IV appello, 23 Luglio 2018 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Siano $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ due topologie per un insieme X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ e' una topologia per X.

(b) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ e' una topologia per X.

(c) Se $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, allora ogni chiuso di $(X, \mathcal{A}_1)$ e' anche un chiuso di $(X, \mathcal{A}_2)$.

(d) Se ogni chiuso di $(X, \mathcal{A}_1)$ e' anche un chiuso di $(X, \mathcal{A}_2)$, allora $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

Svolgimento. Su un insieme $X = \{a, b, c\}$ con tre elementi, si considerino le topologie:

$$\mathcal{A}_1 := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}, \quad \mathcal{A}_2 := \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}.$$

In tal caso:

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, c\}\}.$$

E questa famiglia non e' una topologia perche' non e' stabile rispetto alle intersezioni finite. Infatti:

$$\{c\} = \{b, c\} \cap \{a, c\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2.$$

Quindi la proprieta' (a) e' falsa. Tutte le altre sono vere.

Infatti se $\{A_i\}_{i\in I}$ e' una famiglia di elementi di $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ (cioe' se ogni A_i appartiene sia ad $\mathcal{A}_1$ che ad $\mathcal{A}_2$), allora l'unione $\bigcup_{i\in I} A_i$ e' ancora in $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ in quanto $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}_1$ e $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}_2$. Similmente si prova che $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ e' stabile rispetto alle intersezioni finite. Dunque (b) e' vera.

Infine, supponiamo che $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, e sia C un chiuso in $(X, \mathcal{A}_1)$. Allora $X - C$ e' aperto in $(X, \mathcal{A}_1)$, quindi e' aperto anche in $(X, \mathcal{A}_2)$. E allora $C = X - (X - C)$ e' un chiuso in $(X, \mathcal{A}_2)$. Quindi (c) e' vera. Similmente si prova che (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (c), e la (d). ■

Esercizio 2. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ applicazioni tra spazi topologici. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $g \circ f$ e' aperta e g e' suriettiva e continua, allora f e' aperta.

(b) Se $g \circ f$ e' aperta e g e' iniettiva e continua, allora f e' aperta.

(c) Se $g \circ f$ e' aperta ed f e' suriettiva e continua, allora g e' aperta.

(d) Se $g \circ f$ e' aperta ed f e' iniettiva e continua, allora g e' aperta.

Svolgimento. Cominciamo con il provare che (a) e (d) sono false.

Infatti consideriamo le seguenti funzioni:

$$f : \{0\} \to \mathbf{R}, \quad g : \mathbf{R} \to \{0\},$$

dove f denota l'inclusione. La funzione g e' suriettiva e continua, $g \circ f$ e' l'identita' di $\{0\}$, percio' e' aperta, ma f non lo e'. Dunque (a) e' falsa.

Poi consideriamo le seguenti funzioni:

$$f : t \in (0, 1) \to t \in [0, 1), \quad g : t \in [0, 1) \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1.$$

L'applicazione f e' iniettiva e continua, $g \circ f$ e' aperta, ma g no. Percio' anche (d) e' falsa.

Le altre due proprieta' sono vere.

Cominciamo a provare la (b). Sia A un aperto in X. Per ipotesi $g(f(A))$ e' un aperto di Z. Poiche' g e' continua, $g^{-1}(g(f(A)))$ e' un aperto di Y. Ma, poiche' g e' iniettiva, si ha $f(A) = g^{-1}(g(f(A)))$, che dunque e' un aperto di Y.

Infine proviamo la (c). Sia A un aperto di Y. Poiche' f e' suriettiva, si ha $f(f^{-1}(A)) = A$. Quindi $g(A) = g(f(f^{-1}(A))) = (g \circ f)(f^{-1}(A))$. Cio' prova che $g(A)$ e' un aperto in Z in quanto $g \circ f$ e' aperta, e $f^{-1}(A)$ e' un aperto di X perche' f e' continua.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Esercizio 3. *Nello spazio* $\mathbf{R}$ *si consideri la seguente relazione di equivalenza:* $x \sim y \iff x - y \in \mathbf{Q}$. *Sia* $X = \mathbf{R}/\sim$ *lo spazio quoziente. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X *ha la topologia banale.*

(b) X *ha la topologia discreta.*

(c) X *ha la topologia cofinita.*

(d) X *e' metrizzabile.*

Svolgimento. X ha la topologia banale. Per provare cio', sia A un aperto non vuoto di X, e sia $p : \mathbf{R} \to X$ la proiezione canonica. Allora $A' := p^{-1}(A)$ e' un aperto non vuoto di $\mathbf{R}$ (saturato, cioe' unione di classi di equivalenza). Poiche' in A' c'e' sicuramente un numero razionale, allora $\mathbf{Q} \subseteq A'$. Percio' $0 \in A'$, e quindi per un opportuno numero reale $\epsilon > 0$ avremo $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq A'$. Ora per qualunque numero reale r esiste un numero razionale q tale che $|r - q| < \epsilon$. Cio' implica che r e' equivalente a qualche elemento in A'. Quindi $A' = \mathbf{R}$, ed $A = X$.

Le rimanenti proprieta' sono false in quanto X e' infinito: infatti se p e q sono numeri naturali primi, allora $\sqrt{p}$ e $\sqrt{q}$ sono irrazionali e non equivalenti.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 4. *Sia* A *il sottospazio di* $\mathbf{R}^2$ *costituito dai punti* (x, y) *tali che* $xy \geq 0$, *e sia* B *il sottospazio di* $\mathbf{R}^2$ *costituito dai punti* (x, y) *tali che* $xy > 0$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) A *e' connesso.*

(b) A *e' connesso per cammini.*

(c) B *e' connesso.*

(d) B *e' connesso per cammini.*

Svolgimento. Per ogni (x, y) appartenente ad A, l'applicazione

$$t \in [0, 1] \to (tx, ty) \in A$$

e' un cammino in A che congiunge $(0, 0)$ con (x, y)[5]. Cio' prova che A e' connesso per cammini, quindi anche connesso. Cio' non e' vero per B. Infatti B possiede la seguente sconnessione:

$$B = [(-\infty, 0) \times (-\infty, 0)] \cup [(0, +\infty) \times (0, +\infty)] \,.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). ■

Esercizio 5. *Sia* Q *il sottoinsieme di* $\mathbf{R}^3$ *costituito dai punti* (x, y, z) *tali che* $2x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$. *Siano* H *e* K *i piani di equazione* $x + y = 0$ *e* $x + y = 1$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $Q \cap H$ *e' una 1-varieta'.*

[5] Si osservi che $(0, 0)$ e' un elemento di A, e che $(tx) \cdot (ty) = t^2(xy)$ ha lo stesso segno di xy.

(b) $Q \cap K$ *e' una* 1*-varieta'.*

(c) $Q \cap H$ *e' semplicemente connesso.*

(d) $Q \cap K$ *e' e' semplicemente connesso.*

Svolgimento. Osserviamo che $Q \cap H$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Se denotiamo con J il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dai punti (x, z) tali che $x^2 - z^2 = 0$, allora l'applicazione

$$(x, y, z) \in Q \cap H \to (x, z) \in J$$

e' un omeomorfismo. Quindi $Q \cap H$ e' omeomorfo all'unione di due rette nel piano, distinte, aventi un punto p in comune. Abbiamo visto a lezione che un tale insieme non puo' essere una 1-varieta' (un intorno aperto connesso di p, privato di p, ha quattro componenti connesse, mentre per una 1-varieta' ce ne sono due). Pero' tale insieme e' stellato, con centro il punto in comune alle due rette. Percio' $Q \cap H$ e' semplicemente connesso.

D'altra parte, $Q \cap K$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - z^2 + 1 = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Quindi, $Q \cap K$ e' omeomorfo ad un'iperbole di $\mathbf{R}^2$. I due rami dell'iperbole sono omeomorfi ad $\mathbf{R}$, percio' $Q \cap K$ e' una 1-varieta', ma non e' connesso.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ∎

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, V appello, 30 Agosto 2018 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Uno spazio topologico non vuoto X si dice che ha dimensione* 0 *se, per ogni punto x di X e per ogni intorno U di x in X, esiste un intorno V di x in X, contenuto in U, avente bordo vuoto $\partial V = \emptyset$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se X e' finito allora X ha dimensione 0.

(b) $\mathbf{Q}$ *ha dimensione* 0.

(c) $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ *ha dimensione* 0.

(d) $\mathbf{R}$ *ha dimensione* 0.

Svolgimento. Per svolgere questo esercizio, bisogna ricordare che un sottoinsieme Y di uno spazio X ha bordo vuoto $\partial Y = \emptyset$ se e solo se Y e' chiuso e aperto in X.

Cio' premesso, e' chiaro che $\mathbf{R}$ non ha dimensione 0, perche' e' connesso. Anche uno spazio finito potrebbe non avere dimensione 0. Infatti, sia X lo spazio di Sierpinski. Cioe', X sia un insieme con due elementi $X = \{a, b\}$, con la topologia $\mathcal{A}_X := \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Allora $U = \{a\}$ e' un intorno aperto di a, che non e' chiuso.

Invece le affermazioni (b) e (c) sono vere. Infatti, sia x un qualunque numero razionale, ed U un qualunque intorno di x nello spazio $\mathbf{Q}$. Sappiamo che U e' la traccia su $\mathbf{Q}$ di un intorno M di x in $\mathbf{R}$: $U = \mathbf{Q} \cap M$. Sia $0 < \epsilon \ll 1$ un numero reale non razionale tale che $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ sia contenuto in M. Allora $V := \mathbf{Q} \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ e' un intorno di x in $\mathbf{Q}$, contenuto in U, e V e' sia aperto che chiuso in $\mathbf{Q}$. Infatti, poiche' $x \pm \epsilon$ non e' razionale, allora:

$$V = \mathbf{Q} \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) = \mathbf{Q} \cap [x - \epsilon, x + \epsilon].$$

Similmente si prova che $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ ha dimensione 0.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Esercizio 2. *Sia $f : X \to Y$ un' applicazione iniettiva e continua tra spazi topologici. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X ed $f(X)$ sono omeomorfi.

(b) Se Y e' compatto, allora X ed $f(X)$ sono omeomorfi.

(c) Se Y e' di Hausdorff, allora X ed $f(X)$ sono omeomorfi.

(d) Se Y e' compatto e di Hausdorff, allora X ed $f(X)$ sono omeomorfi.

Svolgimento. Le affermazioni sono tutte false. Infatti, l'applicazione

$$f : t \in [0, 1) \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$$

e' biiettiva, contnua, S^1 e' compatto e di Hausdorff, ma $[0, 1)$ non puo' essere omeomorfo ad S^1, perche' $[0, 1)$ non e' compatto, mentre S^1 lo e'.

In conclusione, le affermazioni sono tutte false. ■

Esercizio 3. *Sia X un insieme, x_0 un fissato punto di X. Sia $\mathcal{A}$ la topologia di X che ha per aperti l'insieme vuoto, e tutti i sottoinsiemi di X contenenti $\{x_0\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $(X, \mathcal{A})$ e' compatto.

(b) $(X, \mathcal{A})$ *e' connesso.*

(c) $(X, \mathcal{A})$ *e' di Hausdorff.*

(d) $(X, \mathcal{A})$ *e' connesso per cammini.*

Svolgimento. Per ogni $x \in X$, si consideri il sottoinsieme A_x di X definito ponendo $A_x = \{x_0, x\}$. Ogni A_x e' un aperto, e la famiglia degli A_x, al variare di x in X, ricopre X. Se da tale famiglia si potesse estrarre un sottoricoprimento finito, allora X sarebbe un insieme finito, in quanto unione finita di sottoinsiemi finiti. Percio' in generale X non e' compatto. Naturalmente (sempre in generale) non sara' nemmeno di Hausdorff, perche' tutti gli aperti (non vuoti) hanno in comune x_0.

Invece X e' connesso per cammini. Infatti, per ogni $x \in X$, la funzione $f : t \in [0,1] \to f(t) \in X$, definita ponendo:

$$f(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } t \in [0,1) \\ x & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

e' un cammino in X che congiunge x_0 con x. Infatti, qualunque sia A un aperto non vuoto di X, allora x_0 appartiene ad A, e percio' $f^{-1}(A) = [0,1)$ se $x \notin A$, oppure $f^{-1}(A) = [0,1]$ se $x \in A$. In ogni caso $f^{-1}(A)$ e' un aperto di $[0,1]$.

Poiche' X e' connesso per cammini, allora X e' anche connesso.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia X il sottospazio di $\mathbf{R}^2$ costituito dai punti (x, y) tali che*

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 - y^2 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) X *e' compatto.*

(b) X *e' connesso.*

(c) Le componenti connesse di X *sono aperte in* X*.*

(d) Le componenti connesse per cammini di X *sono aperte in* X*.*

Svolgimento. Poiche'

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1),$$

allora

$$X = S^1 \cup \{(0,0)\}.$$

Quindi X e' compatto, perche' chiuso e limitato in $\mathbf{R}^2$. Inoltre S^1 e $\{(0,0)\}$ sono simultaneamente chiusi ed aperti in X. Ne consegue che S^1 e $\{(0,0)\}$ sono proprio le componenti connesse di X, che sono anche le componenti connesse per cammini.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (c) e (d). ■

Esercizio 5. *Siano $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Z}$ la topologia naturale e quella di Zariski di $\mathbf{R}^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S^1*, con la topologia indotta da* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{N})$*, e' connesso per cammini.*

(b) S^1*, con la topologia indotta da* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$*, e' connesso.*

(c) S^1*, con la topologia indotta da* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$*, e' connesso per cammini.*

(d) S^1*, con la topologia indotta da* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{N})$*, e' semplicemente connesso.*

(e) S^1*, con la topologia indotta da* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$*, e' semplicemente connesso.*

Svolgimento. Durante il corso abbiamo visto che (a) e' vera, e (d) e' falsa. Le rimanenti affermazioni sono tutte vere.

Per provare cio', osserviamo innanzitutto che la topologia indotta da $(\mathbf{R}^2, \mathcal{Z})$ su S^1 e' quella cofinita. Inoltre si osservi che S^1 e' equipotente ad $\mathbf{R}$, quindi all'intervallo $[0,1]$. Possiamo percio' fissare una applicazione biiettiva

$$\varphi : [0,1] \to S^1.$$

Tale applicazione e' continua, perche' su S^1 c'e' la topologia cofinita. Posto $p_0 = \varphi(0)$, sia $p = \varphi(t)$ un qualunque altro punto di S^1. La restrizione di φ all'intervallo $[0,t]$ e' una funzione continua che porta 0 in p_0, e t in p. Poiche' esiste un omeomorfismo di $[0,1]$ su $[0,t]$ che porta 0 in 0 ed 1 in t, cio' prova l'esistenza di un cammino che congiunge p_0 con un qualunque altro punto p di S^1. Quindi (c) e' vera, lo e' anche (b).

Per provare che anche (e) e' vera, andiamo a provare che S^1 con la topologia di Zariski, e' contraibile. Per provare cio', sara' sufficiente provare che una funzione costante $f : S^1 \to S^1$ e' omotopa all'identita' (quando su S^1 consideriamo la topologia di Zariski). Sia p_0 il punto di S^1 immagine di f. Fissiamo un'applicazione biiettiva

$$\psi : S^1 \times (0,1) \to S^1$$

(tale applicazione esiste perche' $\mathbf{R}^2$ e' equipotente ad $\mathbf{R}$). Definiamo allora l'applicazione $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ ponendo:

$$H(p,t) = \begin{cases} p & \text{se} \quad t = 0 \\ p_0 & \text{se} \quad t = 1 \\ \psi(p,t) & \text{se} \quad t \in (0,1). \end{cases}$$

E' sufficiente provare che H e' continua. Cioe', tenuto conto che su S^1 c'e' la topologia cofinita, e' sufficiente provare che $H^{-1}(p)$ e' chiuso in $S^1 \times [0,1]$, per ogni $p \in S^1$. Cio' segue dal fatto che se $p \neq p_0$ allora $H^{-1}(p)$ consiste dei due punti $(p,0)$ e $\psi^{-1}(p)$, e che se $p = p_0$ allora $H^{-1}(p_0)$ e' l'unione di $S^1 \times \{1\}$ con il punto $\psi^{-1}(p_0)$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b), la (c), e la (e). ∎

Geometria 3 (7 CFU), Matematica, VI appello, 20 Settembre 2018 (V. Di Gennaro).

Svolgimento

Esercizio 1. *Sia $X = (\mathbf{R}, \mathcal{A}_{\text{ssa}})$ lo spazio topologico di sostegno $\mathbf{R}$, con la topologia data dalle semirette sinistre aperte. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Il sottospazio $[0,1]$ di X e' compatto.
(b) Il sottospazio $(0,1]$ di X e' compatto.
(c) Il sottospazio $[0,1)$ di X e' compatto.
(d) Il sottospazio $(0,1)$ di X e' compatto.

Svolgimento. Abbiamo visto a lezione che un sottospazio Y di X e' compatto se e solo se Y e' dotato di massimo. Infatti, poniamo $e = \sup Y$. Se $e \notin Y$, allora (supponendo $e \in \mathbf{R}$)

$$Y \subseteq (-\infty, e) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left(-\infty, e - \frac{1}{n}\right).$$

Da tale ricoprimento aperto, non possiamo estrarne uno finito, altrimenti e non sarebbe l'estremo superiore di Y. Tale argomento prova che se Y e' compatto allora $e \in Y$ (similmente si esamina il caso $e = +\infty$). Viceversa, se $e \in Y$, e

$$Y \subseteq \bigcup_{i \in I} (-\infty, a_i)$$

e' un qualunque ricoprimento aperto di Y, allora esiste un i_0 tale che $e \in (-\infty, a_{i_0})$. Percio' $Y \subseteq (-\infty, a_{i_0})$, e quindi Y e' compatto.

Cio' premesso, e' chiaro allora che (a) e (b) sono vere, mentre (c) e (d) sono false.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (b). ∎

Esercizio 2. *Si denoti con con X lo spazio topologico $\mathbf{R}$ con la topologia naturale, con Y lo spazio topologico $\mathbf{R}$ con la topologia delle semirette sinistre aperte, con Z lo spazio topologico $\mathbf{R}$ con la topologia di Sorgenfrey. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'applicazione $f : t \in X \to (t, t^2) \in Y \times Z$ e' continua.
(b) L'applicazione $g : t \in X \to (t, t^2) \in Z \times Y$ e' continua.
(c) L'applicazione $h : t \in X \to (t, 5) \in Y \times Z$ e' continua.
(d) L'applicazione $l : t \in X \to (-1, t^3) \in Z \times Y$ e' continua.

Svolgimento. Consideriamo innanzitutto la funzione $f : t \in X \to (t, t^2) \in Y \times Z$. Per la proprieta' universale del prodotto, sappiamo che f e' continua se e solo se lo sono le funzioni $f_1 : t \in X \to t \in Y$ ed $f_2 : t \in X \to t^2 \in Z$. Ma f_2 non e' continua, perche' $[1,2)$ e' aperto in Z, ed $f_2^{-1}([1,2)) = (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$ non e' aperto in X.

Anche g non e' continua, in quanto non lo e' la funzione $g_1 : t \in X \to t \in Z$. Infatti $[0,1)$ e' aperto in Z, e $g_1^{-1}([0,1)) = [0,1)$ non e' aperto in X.

La funzione h invece e' continua. Lo e' $h_1 : t \in X \to t \in Y$, perche' gli aperti di Y sono anche aperti di X. E lo e' anche $h_2 : t \in X \to 5 \in Z$, perche' e' una funzione costante.

Anche l e' continua. Infatti $l_1 : t \in X \to -1 \in Z$ e' continua perche' e' costante. Ed $l_2 : t \in X \to t^3 \in Y$ e' continua, perche' per ogni semiretta sinistra aperta $(-\infty, a) \subseteq Y$, si ha $l_2^{-1}(-\infty, a) = (-\infty, \sqrt[3]{a})$, che e' aperto in X.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (c) e la (d). ■

Esercizio 3. *Sia X lo spazio quoziente di un ottagono in cui i lati sono identificati secondo la regola $abb^{-1}a^{-1}cddc$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) X e' omeomorfo ad una sfera.

(b) X e' omeomorfo ad un toro.

(c) X e' omeomorfo ad un piano proiettivo.

(d) X e' omeomorfo ad una bottiglia di Klein.

Svolgimento. Possiamo pensare X come la somma connessa di una sfera $abb^{-1}a^{-1}$, con due piani proiettivi cc, dd. Percio' X e' omeomorfo ad una bottiglia di Klein.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (d). ■

Esercizio 4. *Sia X un insieme, x_0 un fissato punto di X. Sia $\mathcal{A}$ la topologia di X che ha per aperti l'insieme X, e tutti i sottoinsiemi di X non contenenti $\{x_0\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $(X, \mathcal{A})$ e' compatto.

(b) $(X, \mathcal{A})$ e' connesso.

(c) $(X, \mathcal{A})$ e' di Hausdorff.

(d) $(X, \mathcal{A})$ e' semplicemente connesso.

Svolgimento. Sia
$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$
un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un $i_0 \in I$ tale che $x_0 \in A_{i_0}$. Ma allora $A_{i_0} = X$. Percio' X e' compatto.

Per cio' che riguarda la connessione, andiamo a provare che X e' contraibile, percio' (b) e (d) sono vere. Infatti, consideriamo la funzione $F : X \times I \to X$ definita ponendo
$$F(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } t \in [0,1) \\ x_0 & \text{se } t = 1. \end{cases}$$
La funzione iniziale e' l'identita' di X, mentre quella finale e' l'applicazione costante x_0. Inoltre F e' continua. Infatti, se A e' un aperto di X diverso da X, allora $x_0 \notin A$, e percio' $F^{-1}(A) = A \times [0,1)$, che e' aperto in $X \times I$. Ne consegue che X e' omotopicamente equivalente ad $\{x_0\}$, e quindi X e' contraibile.

Infine osserviamo che, in generale, X non e' di Hausdorff, perche' l'unico intorno di x_0 e' tutto X.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b) e la (d). ■

Esercizio 5. *Sia X lo spazio delle matrici quadrate complesse 2×2, identificato con $\mathbf{C}^4 \cong \mathbf{R}^8$. Sia $SU(2)$ il sottospazio di X costituito dalle matrici unitarie, con determinante 1 (una matrice si dice unitaria se e' invertibile, e la sua inversa coincide con la trasposta coniugata). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $SU(2)$ e' compatto.

(b) $SU(2)$ e' connesso.

(c) $SU(2)$ e' di Hausdorff.

(d) $SU(2)$ e' semplicemente connesso.

Svolgimento. Sia
$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

un generico elemento di $SU(2)$ $(a, b, c, d \in \mathbf{C})$. Poiche' il determinante di M e' 1, allora $ad - bc = 1$, e l'inversa di M e' la matrice:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

D'altra parte M e' unitaria, percio':

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{bmatrix}$$

(l'asterisco indica il coniugio). Ne consegue che M puo' essere messa nella forma

$$M = \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix},$$

con $aa^* + bb^* = 1$. Se denotiamo con S il sottospazio di $\mathbf{C}^2 \cong \mathbf{R}^4$ costituito dalle coppie (a, b) tali che $aa^* + bb^* = 1$, l'argomento precedente prova che l'applicazione

$$(a, b) \in S \to \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \in SU(2)$$

e' biiettiva, ed evidentemente un omeomorfismo. D'altra parte, posto $a = a_1 + ia_2$, e $b = b_1 + ib_2$ $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R})$, allora S coincide con il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ costituito dai punti (a_1, a_2, b_1, b_2) tali che $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$. Cioe' $S = S^3$. A lezione abbiamo visto che per S^3 tutte le affermazioni sono vere.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ∎