Capitolo 6. Sistemi lineari di equazioni differenziali.[1]

1. L'integrale generale.

In questo capitolo utilizzeremo la forma canonica di Jordan per studiare alcuni tipi di equazioni differenziali. Un *sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti costanti, di ordine n,* e' una scrittura del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

dove: le a_{ij} rappresentano dei numeri costanti reali, detti *i coefficienti del sistema*; le $f_i(t) : I \to \mathbf{R}$ sono funzioni reali (o anche complesse) di una variabile reale t, dette *i termini noti del sistema* (tali funzioni sono definite e continue in un dato intervallo I, che generalmente sara' tutto $\mathbf{R}$); le $x_i(t)$ sono dette *le incognite del sistema*. Possiamo semplificare la scrittura precedente nel seguente modo. Poniamo $\mathbf{f}(t) := (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$, $\mathbf{x}(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $\dot{\mathbf{x}}(t) := (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))^T$, ed $A := (a_{ij})$. Allora possiamo rappresentare un sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti costanti sotto la seguente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t). \tag{1}$$

Si definisce *soluzione del sistema di equazioni differenziali (1)* una n-pla di funzioni di variabile reale $\mathbf{y}(t) := (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$, $y_i(t) : I \to \mathbf{R}$, definite in I ed ivi derivabili, tali che sostituendo le funzioni $y_i(t)$ ai simboli $x_i(t)$, sia soddisfatto il sistema (1), cioe' per ogni $t \in I$ accade che $\dot{\mathbf{y}}(t) = A \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$ (il "puntino" sta per "derivata rispetto alla variabile t").

Esempio 1. *(i) La funzione vettoriale* $\mathbf{y}(t) := (\frac{e^{3t}}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}, -1, 1)^T$ *e' una soluzione del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + 1 \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) + x_3(t). \end{cases}$$

(ii) La funzione vettoriale $\mathbf{y}(t) := (\frac{9}{2}t^2, 3t, 1 - \frac{3}{2}t^2)^T$ *e' una soluzione del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 3x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_2(t). \quad \blacksquare \end{cases}$$

[1] *Ultimo aggiornamento: 11 dicembre 2019*

Fissato un istante $t_0 \in I$ (che generalmente sara' $t_0 = 0$) ed un vettore costante $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$, una scrittura del tipo

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c} \end{cases}$$

dicesi *problema di Cauchy.* Una soluzione di tale problema (2) e' una soluzione $\mathbf{y}(t)$ del problema (1) che in piu' soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{c}$. Vale il seguente importante teorema:

Teorema di esistenza ed unicita'. *Assegnato un problema di Cauchy, esso ammette un'unica soluzione.*

Esempio 2. *La funzione vettoriale* $\mathbf{y}(t) := (\frac{e^{3t}}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}, -1, 1)^T$ *e' l'unica soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + t \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + 1 \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ \mathbf{x}(0) = (0, -1, 1)^T. \end{cases}$$

(ii) La funzione vettoriale $\mathbf{y}(t) := (\frac{9}{2}t^2, 3t, 1 - \frac{3}{2}t^2)^T$ *e' l'unica soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 3x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_2(t) \\ \mathbf{x}(0) = (0, 0, 1)^T. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Esempio 3. *La funzione identicamente nulla* $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ *e' l'unica soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Consideriamo nuovamente il sistema (1). L'equazione:

$$(3) \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t)$$

si dice *equazione omogenea associata alla (1).* Sia $\mathcal{V}$ l'insieme delle soluzioni di (3), definite nell'intervallo I. Se $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ sono due soluzioni di (3) e c e' uno scalare, allora $\mathbf{y}(t) + \mathbf{z}(t)$ e $c \cdot \mathbf{y}(t)$ sono ancora soluzioni dell'equazione omogenea. In altre parole $\mathcal{V}$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale. Come conseguenza del Teorema di esistenza ed unicita', possiamo provare che $\mathcal{V}$ ha dimensione n, dove n e' l'ordine della matrice A.

Infatti, consideriamo un vettore $\mathbf{c}$ in $\mathbf{R}^n$, e sia $\mathbf{y}(t)$ l'unica soluzione di (3) che soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{y}(0) = \mathbf{c}$. Risulta pertanto ben definita l'applicazione

$$\psi : \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{y}(t) \in \mathcal{V}.$$

L'applicazione ψ e' biiettiva ed e' lineare. Ne risulta che $\mathcal{V}$ e' isomorfo ad $\mathbf{R}^n$ e quindi $\mathcal{V}$ ha dimensione n. La funzione ψ dicesi *integrale generale* dell'equazione omogenea (3). Un altro modo di presentare l'integrale generale e' il seguente. Detta $\{\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)\}$ una base per $\mathcal{V}$ allora ogni altra soluzione $\mathbf{y}(t)$ di (3) si scrive come combinazione lineare

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(t), \qquad c_i \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Anche la scrittura (4) prende il nome di integrale generale di (3). Si osservi che le funzioni $\mathbf{y}_i(t)$ si possono ottenere risolvendo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_i \end{cases}$$

dove $\mathbf{e}_i$ denota l'i-esimo vettore canonico di $\mathbf{R}^n$. Tale base, ottenuta in corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^n$, sara' ancora chiamata *base canonica di* $\mathcal{V}$. Con la scelta della base canonica per $\mathcal{V}$, la soluzione $\mathbf{y}(t)$ che appare nella (4) assume all'istante iniziale proprio il valore $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, cioe' $\mathbf{y}(0)$ coincide con le coordinate di $\mathbf{y}(t)$ rispetto alla base canonica di $\mathcal{V}$.

Ritornando al problema (1), sia $\mathbf{u}(t)$ una qualunque soluzione di (1). Si puo' provare che *tutte e sole le soluzioni del problema (1) si ottengono sommando ad* $\mathbf{u}(t)$ *le soluzioni dell'equazione omogenea associata (3).* Per cui l'integrale generale del problema (1) assume la forma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) + c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(t), \qquad c_i \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

In altre parole, per determinare tutte e sole le soluzioni di (1), occorre conoscerne almeno una, tutte le altre si ottengono sommando a questa le soluzioni dell'equazione omogenea associata (3). Come nel caso omogeneo, se si sceglie $\mathbf{u}(t)$ la soluzione che vale $\mathbf{0}$ all'istante iniziale e la base canonica di $\mathcal{V}$, allora nell'integrale generale (5) $\mathbf{y}(0)$ coincide con le coordinate di $\mathbf{y}(t) - \mathbf{u}(t)$ rispetto alla base canonica di $\mathcal{V}$.

Per risolvere esplicitamente l'equazione (1), cioe' per rendere esplicita la formula (5) dell'integrale generale, si possono usare due metodi: la forma canonica di Jordan, oppure la Trasformata di Laplace. Cominceremo a vedere come si usa la forma canonica. Occorrono delle premesse. Innanzitutto andiamo a studiare il caso $n = 1$. Questo caso e' di una certa importanza per due motivi: e' molto semplice da studiare, e mostra la strada da percorrere nel caso generale $n \geq 1$.

2. Il caso $n = 1$.

Supponiamo $n = 1$. In tal caso il sistema (1) ed il sistema omogeneo ad esso associato (3), assumono la seguente forma:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + f(t), \quad \dot{x}(t) = ax(t),$$

dove a e' una costante, ed $f = f(t)$ e' la funzione che rappresenta il termine noto.

Ora ricordiamo che la funzione esponenziale (funzione della variabile t) si puo' definire come somma di una serie di potenze:

$$e^{at} \quad := \quad \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{a^h t^h}{h!} \quad := \quad 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{a^h t^h}{h!} + \dots.$$

Una serie di potenze e' derivabile termine a termine, percio' si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{e^{at}}} = \quad & a + \frac{a^2 t}{1!} + \frac{a^3t^2}{2!} + \cdots + \frac{a^{h+1}t^h}{h!} + \dots \\ = a & \left(1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{a^h t^h}{h!} + \dots\right) = ae^{at}. \end{aligned}$$

Cioe':

$$\dot{\overline{e^{at}}} = ae^{at}.$$

Questa uguaglianza ci dice che, se poniamo $y_1(t) := e^{at}$, allora la funzione $y_1(t)$ e' la soluzione del Problema di Cauchy $\dot{x}(t) = ax(t)$, $x(0) = 1$. Cioe', $y_1(t)$ e' la base canonica dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\dot{x}(t) = ax(t)$. Inoltre, combinando la formula precedente con il calcolo integrale, si vede che, posto

$$u(t) := \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds,$$

tale funzione e' la soluzione dell'equazione $\dot{x}(t) = ax(t) + f(t)$, che all'istante iniziale assume valore $u(0) = 0$.

Possiamo riassumere quanto detto nel seguente modo.

Nel caso $n = 1$, denotiamo con $\mathcal{S}$ l'equazione $\dot{x}(t) = ax(t)+f(t)$, e con $\mathcal{S}^*$ l'equazione omogenea associata $\dot{x}(t) = ax(t)$. Allora:

(i) La soluzione del Problema di Cauchy $\dot{x}(t) = ax(t)$, $x(0) = c$, e' la funzione $y(t) = ce^{at}$.

(ii) La base canonica per lo spazio delle soluzioni di $\mathcal{S}^*$ e' la funzione $y_1(t) = e^{at}$.

(iii) L'integrale generale di $\mathcal{S}^*$ e'

$$y(t) = ce^{at}.$$

(iv) La soluzione particolare del sistema $\mathcal{S}$, che all'istante iniziale $t = 0$ assume il valore nullo, e'

$$u(t) = \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds.$$

(v) L'integrale generale di $\mathcal{S}$ e'

$$y(t) = \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds + ce^{at}.$$

Tale funzione e' quella soluzione di $\mathcal{S}$ che all'istante iniziale assume il valore $y(0) = c$.

Esempio. *L'integrale generale dell'equazione*

$$\dot{x}(t) = 3x(t) + t$$

e' la funzione

$$y(t) = \frac{1}{9}(e^{3t} - 3t - 1) + ce^{3t}. \quad \blacksquare$$

3. Il caso generale $n \geq 1$.

Il caso generale si studia generalizzando quanto visto in precedenza. Infatti, cosi' come si puo' definire l'esponenziale di un numero, cosi' si puo' anche definire la funzione esponenziale di una matrice.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero $h \geq 0$, consideriamo la seguente matrice "somma parziale"

$$S(h) := I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^h}{h!}.$$

Si ottiene una successione di matrici $\{S(h)\}_{h\geq 0}$, ciascuna delle quali quadrata con entrate $S(h) = (s_{ij}(h))$. Si puo' provare che per ogni i, j la successione numerica $\{s_{ij}(h)\}_{h\geq 0}$ converge ad un certo numero σ_{ij} (che in generale non sara' $e^{a_{ij}}$, a meno che A non sia diagonale). La matrice che cosi' si forma si chiama *esponenziale della matrice* A e si pone $e^A := (\sigma_{ij})$. In altri termini si ha:

$$e^A \quad := \quad \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{A^h}{h!} \quad := \quad I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^h}{h!} + \ldots.$$

Se moltiplichiamo la matrice A per uno scalare t, che possiamo pensare come una variabile, la formula precedente diventa (nel presente contesto si usa mettere lo scalare t a destra, cioe' scriveremo At invece di tA):

$$e^{At} \quad := \quad \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{A^h t^h}{h!} \quad := \quad I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^h t^h}{h!} + \ldots.$$

Adesso le entrate della matrice e^{At} sono delle funzioni della variabile t. La matrice che ha per componenti le derivate di tali funzioni e', per definizione, la matrice derivata di e^{At} rispetto alla variabile t. Lo sviluppo precedente e' derivabile termine a termine, e si ha:

$$\dot{e^{At}} = Ae^{At}.$$

Grazie a tale formula, cosi' come visto nel caso $n = 1$, possiamo dedurre quanto segue:

Teorema 1. *Denotiamo con $\mathcal{S}$ il sistema lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, e con $\mathcal{S}^*$ il sistema omogeneo associato $\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t)$. Allora:*

(i) La soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{c} \end{cases}$$

e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{c}.$$

(ii) La base canonica per lo spazio delle soluzioni del sistema $\mathcal{S}^*$ e' data dalle colonne della matrice e^{At}.

(iii) L'integrale generale di $\mathcal{S}^*$ e':

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \left(e^{At}\right)^{(1)} + c_2 \left(e^{At}\right)^{(2)} + \cdots + c_n \left(e^{At}\right)^{(n)},$$

dove $\left(e^{At}\right)^{(i)}$ denota la colonna di e^{At} di posto i.

(iv) La soluzione particolare di $\mathcal{S}$ che vale $\mathbf{0}$ all'istante iniziale $t = 0$, e' la funzione

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) ds.$$

(v) L'integrale generale di $\mathcal{S}$ e':

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) ds + c_1 \left(e^{At}\right)^{(1)} + c_2 \left(e^{At}\right)^{(2)} + \cdots + c_n \left(e^{At}\right)^{(n)}.$$

Tale Teorema, che e' una conseguenza formale della proprieta' $\dot{e^{At}} = Ae^{At}$, non e' operativo, finche' non impariamo a calcolare esplicitamente la matrice esponenziale. Cio' e' quanto andremo a vedere nel prossimo paragrafo. Dopodiche', le formule che appaiono nel Teorema precedente diventeranno esplicite, e potremo fare degli esempi.

4. Calcolo esplicito dell' esponenziale di una matrice.

Ora andiamo a vedere come si calcola esplicitamente l'esponenziale di una matrice A, utilizzando la forma canonica. Sia J la forma canonica di Jordan di A. Sappiamo allora che esiste qualche matrice invertibile P tale che $A = PJP^{-1}$. Quindi

$$(6) \qquad e^{At} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{A^h t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(PJP^{-1})^h t^h}{h!} = P \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{J^h t^h}{h!} \right) P^{-1} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Tale formula[2] ci mostra che *per calcolare l'esponenziale di At e' sufficiente conoscere una base a stringhe per A (cioe' le colonne della matrice P), e saper calcolare l'esponenziale*

[2] Nel calcolo precedente abbiamo usato la formula $(PJP^{-1})^h = PJ^hP^{-1}$, gia' incontrata nel capitolo sulle applicazione lineari (vedere paragrafo sugli endomorfismi diagonalizzabili).

di una matrice del tipo Jt, dove J e' una matrice a blocchi di Jordan. Nei capitoli precedenti abbiamo imparato come si calcola P. Ci rimane solo da vedere come si calcola e^{Jt}. Innanzitutto osserviamo che, se $J_1, \ldots, J_k$ sono i blocchi di Jordan con cui e' costituita J, allora dalla stessa definizione di matrice esponenziale segue che:

$$(7) \qquad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & & & \\ & e^{J_2 t} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & e^{J_k t} \end{bmatrix}.$$

In altre parole *la matrice esponenziale e^{Jt}, con J matrice a blocchi di Jordan, e' una matrice a blocchi, con blocchi dati dalle matrici esponenziali dei blocchi di Jt.* Quindi per calcolare e^{Jt} ci si puo' ricondurre al caso in cui J sia un singolo blocco di Jordan. Supponiamo allora che

$$J = \lambda I + N$$

sia un blocco di Jordan di ordine p con autovalore λ. Qui N rappresenta il blocco di Jordan relativo all'autovalore 0. Si puo' provare che, poiche' λI ed N commutano[3], allora

$$e^{Jt} = e^{I\lambda t + Nt} = e^{I\lambda t} e^{N}.$$

Poiche' $e^{I\lambda t}$ e' la matrice diagonale con $e^{\lambda t}$ sulla diagonale principale, allora

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{Nt}.$$

Quindi, per calcolare e^{Jt} e' sufficiente saper calcolare e^{Nt}. Ma N e' nilpotente con indice di nilpotenza p, per cui

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{p-1} t^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Questa matrice si calcola facilmente (si vedano gli esempi dopo), e cio' conclude il calcolo esplicito della matrice esponenziale tramite la forma canonica di Jordan.

Esempio 4. *Facciamo degli esempi su come si calcola l'esponenziale di un singolo blocco (nel caso di una matrice qualsiasi occorrera' tener presente le formule (6) e (7)).*

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix};$$

---

[3] Infatti, vale la seguente proprieta': *se $AB = BA$ allora* $e^{A+B} = e^A e^B$. Piu' in generale, esiste una formula, dovuta a Baker-Campbell-Hausdorff, che esprime la differenza $e^{A+B} - e^A e^B$ in termini della matrice $AB - BA$.

$$e^{\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}t} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix};$$

$$e^{\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}t} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6}\\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{6}e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}.$$

In generale, se J e' il blocco di Jordan di ordine p relativo all'autovalore λ, e^{Jt} e' quella matrice quadrata di ordine p che sulla diagonale $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{p-j+1,p}$ ha tutte le entrate uguali a $e^{\lambda t}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$. ■

Esempio 5. *Calcoliamo l'esponenziale della matrice At, dove*

$$A := \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Una base a stringhe per A e' formata dai vettori $\mathcal{S} := \{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$. Quindi $A = PJP^{-1}$, dove P e' la matrice che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$, e J e' la matrice a blocchi di Jordan:

$$J := \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

In base alle formule (6) e (7) precedenti possiamo dire che:

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t} & 0 & 0\\ 0 & e^t & te^t\\ 0 & 0 & e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{3t} & 0 & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & te^t & e^t\end{bmatrix}.$$ ■

5. Calcolo esplicito dell'integrale generale.

Ritornando ai sistemi di equazioni differenziali, andiamo a vedere come, combinando il Teorema 1 e le considerazioni precedenti sulla matrice esponenziale, si riesce ad ottenere il calcolo esplicito dell'integrale generale.

Esempio 6. *Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione*

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 3x_1 + t\\ \dot{x}_2 = x_2 + 1\\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3,\end{cases}$$

cioe' dell'equazione

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dal Teorema 1 e dall'esempio precedente segue che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e'

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ te^t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Poi sappiamo anche (dal Teorema 1, (iv)) che la soluzione particolare $\mathbf{u}(t)$ *si puo' calcolare nel seguente modo:*

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot \mathbf{f}(s) ds = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{3(t-s)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} & 0 \\ 0 & (t-s)e^{t-s} & e^{t-s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} se^{3(t-s)} \\ e^{t-s} \\ (t-s)e^{t-s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \int_0^t se^{3(t-s)} ds \\ \int_0^t e^{t-s} ds \\ \int_0^t (t-s)e^{t-s} ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \\ e^t - 1 \\ 1 - e^t + te^t \end{bmatrix}.$$

In conclusione l'integrale generale dell'equazione assegnata e'

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \\ e^t - 1 \\ 1 - e^t + te^t \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ te^t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esempio 7. *Risolviamo il seguente problema di Cauchy:*

$$(9) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + t \\ \dot{x}_2 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Nell'esempio precedente abbiamo calcolato l'integrale generale, esplicitato tramite la base canonica dell'equazione omogenea associata, e la soluzione particolare $\mathbf{u}(t)$ *con* $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$. *Sappiamo che in tal caso la soluzione del problema di Cauchy assegnato si ottiene ponendo nell'integrale generale* $(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 1)$. *Quindi il problema assegnato ammette la soluzione*

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{10}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \\ 2e^t - 1 \\ 2te^t + 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo anche verificare che il risultato e' esatto. Infatti $\mathbf{y}(0) = (1,1,1)^T$*, ed inoltre si ha:*

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \\ 2e^t \\ 2(t+1)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{10}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \\ 2e^t - 1 \\ 2te^t + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cioe' $\mathbf{y}(t)$ *soddisfa la (9).* ■

Esempio 8. *Calcolare l'integrale generale del sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico della matrice A *del sistema e'* $t^2+4 = (t-2i)(t+2i)$*. Quindi* A *e' diagonalizzabile ed una base di autovettori e' formata dai vettori* $(2i,1)$*,* $(2i,-1)$*. Pertanto, tenuto conto delle formule di Eulero, abbiamo:*

$$e^{At} = \frac{i}{4}\begin{bmatrix} 2i & 2i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2ti} & 0 \\ 0 & e^{-2ti} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2i \\ -1 & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\, 2t & -2sen\, 2t \\ \frac{1}{2}sen\, 2t & cos\, 2t \end{bmatrix}.$$

Quindi l'integrale generale richiesto e':

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} cos\, 2t \\ \frac{1}{2}sen\, 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2sen\, 2t \\ cos\, 2t \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esempio 9. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Possiamo mettere $c_1 = 1$ *e* $c_2 = -1$ *nell'integrale generale calcolato nell'esempio precedente. La soluzione cercata e':*

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\, 2t + 2sen\, 2t \\ \frac{1}{2}sen\, 2t - cos\, 2t \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esempio 10. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cioe' e' la terza colonna della matrice e^{At}*, dove* A *e' la matrice dei coefficienti del sistema assegnato:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base a stringhe per A *e' data dalle colonne della matrice*

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E si ha

$$P^{-1}AP = J := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t^2 + 1 & 3t & \frac{9}{2}t^2 \\ t & 1 & 3t \\ -\frac{1}{2}t^2 & -t & 1 - \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In conclusione la soluzione del problema di Cauchy assegnato e'

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2}t^2 \\ 3t \\ 1 - \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Osservazione. *Ci sono altri tipi di equazioni differenziali il cui studio puo' essere ricondotto ad un sistema lineare di equazioni differenziali. Per esempio, consideriamo il caso di una equazione differenziale lineare del tipo normale di ordine* n *a coefficienti costanti del tipo:*

$$x^{(n)} = a_1x + a_2\dot{x} + a_3\ddot{x}_3 + \cdots + a_nx^{(n-1)} + f,$$

con condizione iniziale

$$x(0) = c_0,\, \dot{x}(0) = c_1,\, \ldots,\, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

In questo caso l'incognita e' una funzione reale di una variabile reale $x = x(t)$. La soluzione del problema precedente coincide con la prima componente $y_1(t)$ della soluzione $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy rappresentato dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n + f \\ \mathbf{x}(0) = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T. \end{cases}$$

Per esempio la generica soluzione $x = x(t)$ del problema

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f$$

coincide con la prima componente $y_1(t)$ della generica soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 + f, \end{cases}$$

cioe' del problema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Si noti che il polinomio caratteristico $p(t)$ della matrice dei coefficienti di questo sistema e'

$$p(t) = t^2 + at + b.$$

Similmente, la generica soluzione $x = x(t)$ del problema

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f$$

coincide con la prima componente $y_1(t)$ della generica soluzione del problema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix},$$

ed il polinomio caratteristico $p(t)$ della matrice dei coefficienti di questo sistema e'

$$p(t) = t^3 + at^2 + bt + c.$$

6. Cenni sull'uso della Trasformata di Laplace per risolvere i sistemi di equazioni differenziali.

Per risolvere un problema di Cauchy si puo' anche utilizzare la *Trasformata di Laplace*. Vediamo come si fa. A tale proposito consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}. \end{cases}$$

Applicando ad entrambi i membri la trasformazione di Laplace $\mathcal{L}$ otteniamo:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{c} = A\mathbf{X}(s) + \mathbf{F}(s),$$

dove con $\mathbf{X}(s)$ e $\mathbf{F}(s)$ abbiamo denotato le trasformate di $\mathbf{x}(t)$ e di $\mathbf{f}(t)$. Si deduce la seguente formula:

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{F}(s))$$

che riconduce il calcolo della trasformata di Laplace della soluzione $\mathbf{x}(t)$ che stiamo cercando, ad un calcolo algebrico. Ad esempio, nel caso omogeneo (cioe' quando $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$) per conoscere $\mathbf{X}(s)$ e' sufficiente calcolare la matrice inversa $(sI - A)^{-1}$, che in generale si presenta come una matrice con entrate funzioni razionali di s (cioe' rapporti di polinomi nella variabile s). Una volta calcolata $\mathbf{X}(s)$, per conoscere la soluzione del problema di Cauchy $\mathbf{x}(t)$ occorre calcolare l'antitrasformata di $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{X}(s)\right].$$

Chiaramente e' qui che si incontrano le maggiori difficolta' nei calcoli.

Esempio 11. *Come esempio, riprendiamo il seguente problema di Cauchy, che abbiamo gia' risolto utilizzando l'esponenziale di una matrice, e vediamo come si risolve utilizzando la Trasformata di Laplace:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + t \\ \dot{x}_2 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Abbiamo appena visto che

$$\mathbf{X}(s) = \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathcal{L} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} s-3 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+1}{s^2(s-3)} \\ \frac{s+1}{s(s-1)} \\ \frac{s^2+1}{s(s-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Adesso per calcolare la soluzione cercata $\mathbf{x}(t)$ *occorre antitrasformare le entrate di* $\mathbf{X}(s)$*, cioe' occorre calcolare*

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s^2+1}{s^2(s-3)} \\ \frac{s+1}{s(s-1)} \\ \frac{s^2+1}{s(s-1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s^2(s-3)}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s(s-1)}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s(s-1)^2}\right) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Sospendiamo momentaneamente lo svolgimento dell'esempio, che riprenderemo tra poco, per vedere come si calcola in generale l'antitrasformata di una funzione razionale. Tale calcolo si basa sulle seguenti osservazioni. Innanzitutto ricordiamo che e' nota l'antitrasformata di una funzione razionale "semplice", cioe' del tipo

$$\frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}},$$

dove n e' un intero ≥ 0 e $\lambda \in \mathbf{C}$ (una tale funzione e' detta anche *fratto semplice*). Infatti si ha la seguente formula:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}}\right) = \frac{t^n}{n!}e^{\lambda t}. \tag{10}$$

L'altra osservazione consiste nella seguente proposizione che consente di ricondurre una qualunque funzione razionale ad una somma di fratti semplici.

Proposizione. *Siano $P(s)$ e $Q(s)$ polinomi non nulli. Supponiamo che il grado di $P(s)$ sia strettamente minore del grado di $Q(s)$. Sia*

$$Q(s) = c(s-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (s-\lambda_h)^{m_h}$$

la fattorizzazione di $Q(s)$ in polinomi lineari. Allora esistono $m_1+m_2+\cdots+m_h$ costanti opportune $a_{11}, \ldots, a_{1m_1}, a_{21}, \ldots, a_{2m_2}, \ldots\ldots, a_{h1}, \ldots, a_{hm_h}$ tali che valga la seguente uguaglianza:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_{11}}{s-\lambda_1} + \frac{a_{12}}{(s-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(s-\lambda_1)^{m_1}} + \ldots\ldots + \frac{a_{h1}}{s-\lambda_h} + \cdots + \frac{a_{hm_h}}{(s-\lambda_h)^{m_h}}.$$

L'espressione precedente e' detta anche *decomposizione in fratti semplici di* $\frac{P(s)}{Q(s)}$. Inoltre si osservi che l'ipotesi sui gradi di $P(s)$ e $Q(s)$ e' sempre soddisfatta nel caso dei sistemi di equazioni differenziali, come andremo ora a vedere.

Esempio 12. *Infatti riprendiamo l'esempio precedente. Cominciamo col calcolare*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s^2(s-3)}\right).$$

Per fare cio' innanzitutto decomponiamo in fratti sempilci la frazione assegnata, cioe' cerchiamo costanti A, B, C tali che

$$\frac{s^2+1}{s^2(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3}.$$

Sommando le frazioni al secondo membro otteniamo:

$$\frac{s^2+1}{s^2(s-3)} = \frac{(A+C)s^2+(B-3A)s-3B}{s^2(s-3)}.$$

Le due frazioni hanno lo stesso denominatore. Quindi la loro uguaglianza equivale all'uguaglianza dei rispettivi numeratori, cioe' al fatto che

$$s^2+1=(A+C)s^2+(B-3A)s-3B.$$

Ricordando che due polinomi sono uguali se e solo se sono uguali i rispettivi coefficienti, l'uguaglianza precedente equivale alle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -3A+B=0 \\ -3B=1. \end{cases}$$

Questo sistema lineare consente di calcolare le costanti. Si trova cosi' che $A=-\frac{1}{9}$, $B=-\frac{1}{3}$ *e* $C=\frac{10}{9}$. *Quindi resta calcolata la decomposizione in fratti semplici:*

$$\frac{s^2+1}{s^2(s-3)} = \frac{-1/9}{s}+\frac{-1/3}{s^2}+\frac{10/9}{s-3}.$$

Ora tenuto conto della linearita' dell'antitrasformata e della formula (10) siamo in grado di calcolare la prima componente $x_1(t)$ *di* $\mathbf{x}(t)$, *che e':*

$$x_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s^2(s-3)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1/9}{s}+\frac{-1/3}{s^2}+\frac{10/9}{s-3}\right)$$

$$=-\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+\frac{10}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)=-\frac{1}{9}-\frac{t}{3}+\frac{10}{9}e^{3t}.$$

In modo analogo si calcolano $x_2(t)$ *ed* $x_3(t)$, *trovando:*

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} \frac{10}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9} \\ 2e^t-1 \\ 2te^t+1 \end{bmatrix},$$

che e' la stessa soluzione che avevamo trovato in precedenza utilizzando l'esponenziale di una matrice. ■

Esempio 13. *Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione*

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

utilizzando la Trasformata di Laplace. Per fare cio' osserviamo che l'integrale generale puo' essere visto come la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale generica $\mathbf{x}(0) = (c_1, c_2)^T$*. Per cui passando alla trasformata di Laplace abbiamo:*

$$\mathbf{X}(s) = \left(sI - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} + c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{s-3}{s^2(s-2)^2} + c_2 \frac{1}{(s-2)^2} \\ -\frac{1}{s^2(s-2)^2} - c_1 \frac{1}{(s-2)^2} + c_2 \frac{s-1}{(s-2)^2} \end{bmatrix}.$$

Ora occorre antitrasformare. Cominciamo con la prima componente:

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(c_1 \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{s-3}{s^2(s-2)^2} + c_2 \frac{1}{(s-2)^2}\right)$$

$$= c_1 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-2)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{s^2(s-2)^2}\right) + c_2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)$$

$$= c_1 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-2)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{s^2(s-2)^2}\right) + c_2 t e^{2t}.$$

Per calcolare la decomposizione in fratti semplici di $\frac{s-3}{(s-2)^2}$ *poniamo:*

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2}.$$

Quindi deve essere

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{As + B - 2A}{(s-2)^2}$$

cioe'

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = -3. \end{cases}$$

Deduciamo $A = 1$ *e* $B = -1$*, cioe'*

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{-1}{(s-2)^2}$$

da cui

$$c_1 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-2)^2}\right) = c_1\left(e^{2t} - te^{2t}\right) = c_1(1-t)e^{2t}.$$

Similmente si vede che

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{s^2(s-2)^2}\right) = -\frac{1}{4}\left(2 + 3t + (t-2)e^{2t}\right).$$

Raccogliendo i calcoli abbiamo:

$$x_1(t) = -\frac{1}{4}\left(2 + 3t + (t-2)e^{2t}\right) + c_1(1-t)e^{2t} + c_2te^{2t}.$$

In modo analogo si calcola

$$x_2(t) = -\frac{1}{4}\left(1 + t + (t-1)e^{2t}\right) - c_1te^{2t} + c_2(t+1)e^{2t}.$$

In conclusione l'integrale generale cercato e':

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(2 + 3t + (t-2)e^{2t}\right) \\ -\frac{1}{4}\left(1 + t + (t-1)e^{2t}\right) \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^{2t} \\ (t+1)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Si osservi che l'integrale generale appare come la somma dell'integrale particolare

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(2 + 3t + (t-2)e^{2t}\right) \\ -\frac{1}{4}\left(1 + t + (t-1)e^{2t}\right) \end{bmatrix}$$

verificante la condizione iniziale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$*, con l'integrale generale dell'equazione omogenea associata*

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^{2t} \\ (t+1)e^{2t} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Bibilografia consigliata per questo capitolo:

M. Bertsch-R. Dal Passo, *Elementi di Analisi matematics, II*, Ed. Aracne.

B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Ed. Springer.

S. Salsa-A. Squellati, *Esercizi di Analisi 2*, Ed. Zanichelli.