L'Algoritmo di Gauss.

1) *Le operazioni elementari.*

Durante il corso denoteremo le operazioni elementari che si possono eseguire sulle righe di una data matrice A con i seguenti simboli:

p_{ij} significa scambiare la riga $i-$esima A_i di A con la riga $j-$esima A_j;

$e_{ij}(k)$ significa sommare alla riga A_i la riga A_j moltiplicata per lo scalare k (in questa operazione si assume $i \neq j$);

$e_i(k)$ significa moltiplicare la riga A_i per lo scalare k (in questa operazione si assume $k \neq 0$).

A lezione abbiamo svolto il seguente esempio:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{p_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{31}(-6)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{e_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2(-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una matrice si dice elementare se si ottiene dalla matrice unitaria I tramite una sola operazione elementare. Abbiamo denotato tali matrici con simboli corrispondenti:

$$P_{ij}, \quad E_{ij}(k), \quad E_i(k).$$

Per esempio nel caso delle matrici 2×2 abbiamo:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{21}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}; \quad E_1(k) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eseguire una operazione elementare e su una matrice A equivale a moltiplicare (a sinistra di) A per la corrispondente matrice elementare:

$$A \xrightarrow{e} E \cdot A.$$

2) *Nozione di matrice a scala.*

Sia A_i una riga non nulla di una data matrice A. Partendo dalla sinistra, la prima componente non nulla che figura in A_i si chiama *il pivot di* A_i. Similmente, se A^j e' una colonna non nulla di A, partendo dall'alto, la prima componente non nulla che figura in A^j si chiama *il pivot di* A^j.

Una matrice A si dice che e' *a scala* se soddisfa le seguenti due condizioni:

(1) Le eventuali righe nulle di A si trovano in fondo alla matrice.

(2) Per ogni riga non nulla A_i di A, detto a_{ij} il suo pivot, sono nulle tutte le componenti di A che si trovano al di sotto di a_{ij}, nella stessa colonna e nelle colonne precedenti.

3) *L'Algoritmo di Gauss.*

L'Algoritmo di Gauss prevede in ingresso una data matrice A, $m \times n$, ed in uscita una matrice S a scala per righe, equivalente per righe ad A. L'algoritmo funziona cosi':

Passo 1

1.1 Se la matrice e' formata da una sola riga, l'algoritmo termina; altrimenti:

1.2 individuare la colonna non nulla con indice piu' basso, ed il suo pivot, cioe' la sua prima componente non nulla; se non esistono colonne non nulle, la matrice e' nulla, quindi e' gia' a scala: in questo caso l'algoritmo termina qui.

1.3 Se il pivot e' nella riga di posto i, scambiare la prima riga con quella di posto i.

1.4 Rendere nulle tutte le altre componenti della colonna che contiene il pivot della prima riga, sommando alle varie righe opportuni multipli della prima.

Passo 2

Ripetere il passo 1 sulla matrice ottenuta dal passo precedente, schermandone pero' la prima riga.

Passo 3

Ripetere il passo 2 sulla matrice schermata, fino ad esaurimento delle righe.