Algoritmo per la diagonalizzazione di un operatore lineare.

Sia $f : V \to V$ un operatore lineare su uno spazio vettoriale V di dimensione n. L'operatore f si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{A}$ di V tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale. Siano $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ i vettori di $\mathcal{A}$, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le componenti della diagonale principale di $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$. Allora per definizione di matrice rappresentativa deve essere

$$f(\mathbf{b}_1) = \lambda_1 \mathbf{b}_1, \quad \dots \quad , f(\mathbf{b}_n) = \lambda_n \mathbf{b}_n.$$

Cio' motiva le seguenti definizioni:

1) un numero λ dicesi *autovalore* per f se esiste un vettore $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tale che $f(\mathbf{b}) = \lambda \mathbf{b}$; il vettore $\mathbf{b}$ dicesi *autovettore* di f relativo a λ; l'insieme $Spec(f)$ di tutti gli autovalori di f si chiama lo *spettro* di f; fissato un autovalore λ si denota con V_λ *l'autospazio* associato a λ, cioe' il sottospazio di V formato da tutti gli autovettori associati a λ, piu' il vettore nullo; cioe'

$$V_\lambda := \{\mathbf{b} \in V \ : \ f(\mathbf{b}) = \lambda \mathbf{b}\};$$

2) detta $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ una qualunque matrice rappresentativa di f, il determinante $p_f(t)$ della matrice $A - tI$ si chiama il *polinomio caratteristico di* f; il polinomio caratteristico non dipende dalla base scelta $\mathcal{B}$, ed e' del tipo

$$p_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

In particolare il polinomio caratteristico ha grado pari alla dimensione di V.

3) Si puo' provare che un numero λ e' un autovalore per f se e solo se $p_f(\lambda) = 0$; in altre parole $Spec(f)$ e' formato dalle soluzioni dell'equazione algebrica $p_f(t) = 0$;

4) poiche' $p_f(\lambda) = 0$, allora il polinomio $t - \lambda$ e' un fattore di $p_f(t)$ (Teorema di Ruffini); la massima potenza $m_a(\lambda)$ con cui appare tale fattore in $p_f(t)$ si dice la *molteplicita' algebrica* di λ per f;

5) accanto alla molteplicita' algebrica si definisce la *molteplicita' geometrica* $m_g(\lambda)$ di un autovalore; per definizione $m_g(\lambda)$ e' la dimensione di V_λ;

6) in generale, per ogni autovalore λ, si ha $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, e se f e' diagonalizzabile allora $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Si ha il seguente

Teorema (algoritmo per la diagonalizzazione di un operatore lineare). *L'operatore f e' diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti due proprieta':*

(1) Il polinomio caratteristico di f si decompone completamente nel prodotto di polinomi di primo grado (reali);

(2) Per ogni autovalore λ di f si ha $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

In tal caso, denotata con $\mathcal{A}_\lambda$ una base per l'autospazio V_λ, l'unione

$$\mathcal{A} := \bigcup_{\lambda \in Spec(f)} \mathcal{A}_\lambda$$

e' una base di V tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ e' una matrice diagonale (in altre parole $\mathcal{A}$ e' una base di V formata da autovettori per f). Sulla diagonale principale di tale matrice appaiono gli autovalori di f, ciascuno tante volte quant'e' la sua molteplicita' algebrica. Tali autovalori appaiono inoltre in ordine corrispondente all'ordine con cui figurano gli autovettori di $\mathcal{A}$. In particolare, se f e' un operatore del tipo $f : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \to A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, detta P la matrice le cui colonne sono i vettori di $\mathcal{A}$, allora $P^{-1}AP$ e' una matrice diagonale.

Osservazioni.

1) Sia assegnato un operatore lineare $f : V \to V$. Per ogni numero λ, consideriamo l'applicazione $f - \lambda \cdot id_V : V \to V$ definita ponendo

$$(f - \lambda \cdot id_V)(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{v}.$$

Allora $f - \lambda \cdot id_V$ e' anch'esso un operatore lineare, e se λ e' un autovalore per f si ha:

$$V_\lambda = \ker(f - \lambda \cdot id_V).$$

2) Il numero $\lambda = 0$ e' un autovalore per f se e solo se $\dim \ker(f) > 0$; in tal caso l'autospazio V_0 coincide con $\ker(f)$.

3) Se l'operatore $f : V \to V$ e' diagonalizzabile, denotati con λ_1, λ_2, $\dots$, λ_h gli autovalori distinti di f ($h \geq 1$), allora V e' la somma diretta dei suoi autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_h}$, cioe'

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_h}.$$

4) Se $m_a(\lambda) = 1$ allora necessariamente $m_g(\lambda) = 1$. Per cui *se $f : V \to V$ e' un operatore definito su uno spazio di dimensione n, ed ha n autovalori distinti, allora f e' diagonalizzabile.*