Complementi di Analisi Numerica II - Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2014/2015

Titolare dell'insegnamento: prof. Paolo Zellini
Parte dell'insegnamento è svolto dal prof. Carmine Di Fiore

Obiettivi formativi: Approfondimenti di temi centrali del calcolo numerico su grande scala (come la minimizzazione di funzioni o l'integrazione di problemi alle derivate parziali con procedimenti iterativi) con speciale attenzione alla misura della complessità computazionale.

Modalità d'esame: orale

I parte (docente: Paolo Zellini)

1. Risoluzione numerica di sistemi di equazioni non lineari. Derivata direzionale. Metodo di Newton. Teorema di Convergenza locale. Analisi critica del metodo di Newton modificato.

2. Metodi secanti per la risoluzione numerica di sistemi di equazioni. Approssimazione della matrice Jacobiana. Metodo di Broyden.

3. Teorema di caratterizzazione di metodi con convergenza superlineare. Condizioni per la convergenza quadratica. Teoria della perturbazione.

4. Problemi di minimo non vincolato per funzioni reali. Metodo del gradiente. Line search. Criterio di steepest descent (massima pendenza). Metodo di Newton per problemi di minimo. Metodo BFGS e approssimazioni dell'Hessiano mediante correzioni di rango 2 con trasformazioni di Givens.

5. Algoritmi newtoniani per problemi di minimo non vincolato con un costo computazionale $O(n \log n)$ per passo. Algebre di matrici e trasformate veloci. Teorema della proiezione di Hilbert. Algoritmi LQN.

II parte (docente: Carmine Di Fiore)

Problemi differenziali alle derivate parziali $Lu = f$ su $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ del secondo ordine in forma di divergenza uniformemente ellittico con condizioni al bordo. Esempi. Formulazione variazionale. Esistenza e unicità della soluzione u in $H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$ come corollario del teorema di Lax-Milgran per spazi di Hilbert V.

Approssimazione interna u_h di u, con u_h in V_h sottospazio di dimensione finita di V. Consistenza della famiglia di sottospazi $\{V_h\}$ e convergenza di u_h a u. Metodo di Galerkin. Base di V_h ed equivalenza del calcolo di u_h con la risoluzione di un sistema lineare $A\mathbf{u}_h = \mathbf{f}$.

Metodo iterativo di Richardson per la risoluzione di sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con parametro costante ottimale oppure variabile tale da minimizzare il residuo. Relazione di Richardson con il metodo di Eulero e il teorema di Perron per prolemi differenziali di Cauchy autonomi. Minimizzazione del residuo sugli spazi di Krilov relativi ad A e al residuo iniziale. Costruzione e caratteristiche principali del metodo iterativo GMRES.

Il caso $V = H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$, Ω poligono in $\mathbb{R}^2$. Il metodo degli elementi finiti: definizione di V_h come insieme delle funzioni polinomiali a tratti su una triangolazione di Ω di ampiezza h; famiglie di triangolazioni regolari e quasi-uniformi; convergenza di u_h a u. Applicazione ai problemi di Poisson in una e due variabili, e, più in generale, al problema di convezione-diffusione. Importanza, nel calcolo di u_h (risoluzione di $A\mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$), della scelta della base di V_h. Minimizzare il numero di condizionamento di A. Base gerarchica come alternativa conveniente alla base standard di Lagrange (teorema di Yserentant).

Una classe di metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (che include Richardson, Gauss-Seidel, Rilassamento), ovvero per la minimizzazione di forme quadratiche associate a opportune matrici definite positive H dipendenti da A. I metodi del gradiente e del gradiente coniugato (GC) per sistemi con A definita positiva, e loro interpretazione grafica.

Polinomi (di Chebycev) di minima norma infinito in un intervallo. Dipendenza della rapidità di convergenza di GC dalla distribuzione degli autovalori di A. Tecniche di precondizionamento e versioni "transformed" e "untransformed" di GC precondizionato. La sostituzione della base di Lagrange di V_h con quella gerarchica (vedi sopra) è interpretabile come una tecnica di precondizionamento. Precondizionatori circolanti per sistemi di Toeplitz.

(Per un programma più dettagliato si veda www.mat.uniroma2.it$\backslash tilde$difiore)