

~~9/10/14~~
2^a PARTE DI CAN II (CARMINE DI FIORE)
(MATEMATICA) GIUGNO 2006

(APPUNTI di Federica ~~124~~
con mie aggiunte (pp. 1-84))

(ALLEGATO $\frac{1}{9} - \frac{9}{9}$)

(DISPENSE prof. CANUTO
ARTICOLO di YSERENTANT
TRE PAGINE su ELLISSOIDI)

questo foglio è
queste cose sono
al FO CA 2 POINT
(oltre che qui)

NOTE

- Per l'esame è sufficiente studiare gli APPUNTI.
- Alcune dimostrazioni omesse negli APPUNTI sono rimandate negli stessi all'ALLEGATO $\frac{1}{9} - \frac{9}{9}$
In $\frac{1}{9}$ c'è anche una descrizione delle fonti di alcuni degli argomenti trattati. A queste fonti ci si riferisce, a volte, negli stessi APPUNTI
- Nelle DISPENSE del prof. Canuto alcuni dei risultati descritti negli APPUNTI vengono stabiliti più in generale per $(T, \Pi_K(T), p \rightarrow p(a_{ij}))$
 Π_K = polinomi di grado K in x_1 e x_2
(tali DISPENSE sono incomplete; per questo motivo con esse viene fornito l'ARTICOLO di YSERENTANT)
- C'erano: Andrea, Caterina, Donatella, Emanuele, Federica, Maria Paola, Federica, Sara, Stefania

- DISPENSE PROF. CANUTO (POLITECNICO TORINO) (CORSO IN DAM 1993-1994)

- ARTICOLO DI YSERENTANT (NUMERISCHE MATHEMATIK 49 1986)

- DISUGUAGLIANZA DI KANTOROVICH
DIMOSTRAZIONE

$$T_K\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)^K + \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)^K \right]$$

$x > 1$

DIMOSTRAZIONE

$$\mu_2 \left(\begin{bmatrix} \overset{1}{\ddots} & & \\ & \overset{2}{\ddots} & \\ & & \overset{m}{\ddots} \end{bmatrix} \right) = O(m^2)$$

DIMOSTRAZIONE

- CONVERGENZA di GC in al più m passi
DIMOSTRAZIONE

$$P_{GS} \text{ preconditionatore molto buono per } A = T = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-1} \\ t & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ t^{n-1} & \dots & t & 1 \end{bmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE

- GRAFICO degli autovalori di $P_{GS}^{-1}A$ e di $P_{TC}^{-1}A$
per $A = \begin{bmatrix} 1 & (\frac{1}{2}) & \dots & (\frac{1}{2})^{31} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ (\frac{1}{2})^{31} & \dots & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ e applicazione dei Teoremi sulla rapidità di convergenza di GC.

Per i metodi per risolvere $Ax = b$ descritti,

HO LETTO ALCUNI PARAGRAFI di "Numerical approximation of PDE", SPRINGER, 1997
A. QUARTERONI, A. VALLI (è in biblioteca),

in particolare pp. 39-43 e 59-61. Per GMRES ho sviluppato le pagine 59-61.
Non sono più accorto che il mio sviluppo ^{a meno delle notazioni} pressoché coincide con la descrizione di GMRES in "Iterative methods for sparse linear systems", Y. Saad (è in biblioteca)

Il fatto che RIASSAMENTO, GAUSS-SEIDEL, GRADIENTE, RICHARDSON E GRADIENTE CONIUGATO possano essere visti come casi particolari di una classe di metodi generale è un approfondimento di una analoga osservazione riguardante i primitivi metodi, presente nelle dispense del corso di Analisi Numerica del prof. Gross (1988/89, "UNIV. CA SAPIENZA").

Per definizione di β_k

$$(u_{k+1}, u_k)_A = 0$$

Inoltre, come si è visto,

$$r_{k+1}^T r_k = 0.$$

(0) 5/9

(0)

In realtà, se $r_0, r_1, \dots, r_p$ sono non nulli allora

$$\begin{cases} u_\ell^T A u_J = 0 \\ r_\ell^T r_J = 0 \end{cases}$$

$0 \leq J < \ell \leq p$
 $\rightarrow$ la direzione u_ℓ ("coniugato")
 è A-ortogonale a tutte le direzioni precedenti (0')
 $\rightarrow$ il residuo r_ℓ è ortogonale a tutti i residui precedenti

Sim. Si fa vedere che se la tesi è vera per $p = m$:

$$\begin{cases} u_\ell^T A u_J = 0 \\ r_\ell^T r_J = 0 \end{cases} \quad 0 \leq J < \ell \leq m \quad (1)$$

allora deve essere vera anche per $p = m+1$:

$$\begin{cases} u_\ell^T A u_J = 0 \\ r_\ell^T r_J = 0 \end{cases} \quad 0 \leq J < \ell \leq m+1 \quad (2)$$

È sufficiente provare che (2) vale per $\ell = m+1$, cioè che valgono le identità:

$$\begin{cases} u_{m+1}^T A u_J = 0 \\ r_{m+1}^T r_J = 0 \end{cases} \quad 0 \leq J < m+1 \quad (3)$$

Dalla (0) segue che le (3) sono vere per $J = m$:

$$\begin{cases} u_{m+1}^T A u_m = 0 \\ r_{m+1}^T r_m = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Supponiamo $J < m$:

$$r_{m+1}^T r_J = (r_m - \beta_m A u_m)^T r_J \stackrel{(1)}{=} -\beta_m (A u_m)^T (u_J - \beta_{J-1} u_{J-1}) \stackrel{(4)}{=} 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_{m+1}^T A u_J &= (r_{m+1} + \beta_m u_m)^T A u_J \stackrel{(1)}{=} r_{m+1}^T A u_J = \\ &= r_{m+1}^T \beta_J^{-1} (r_J - r_{J+1}) = \bigcirc + \bigcirc = \bigcirc \end{aligned}$$

$\uparrow$
per (5)

$\uparrow$
per (5), se $J+1 < m$

per (4), se $J+1 = m$

CONSEGUENZA

Ne segue che, in aritmetica esatta, per un $p \leq m$ deve essere $x_p = A^{-1}b$

In aritmetica approssimata un tale p non può esistere perché le direzioni (i residui) effettivamente calcolati non possono essere esattamente A-ortogonali (ortogonali).

D'altro canto se m è grande anche fare m passi sarebbe proibitivo. Si vorrebbe poter dire che x_k è vicina ad $A^{-1}b$ anche per $k \ll m$. Se m è grande

Politecnico di Torino

Anno Accademico 2014/15 (istituito per la prima volta nell'A.A.2010/11)

Metodi numerici per le equazioni alle derivate parziali

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica - Torino

Presentazione

Il corso è una introduzione ad alcune metodologie di uso generale per il trattamento numerico di problemi alle derivate parziali, che modellizzano fenomeni

di interesse ingegneristico.

Particolare accento verrà dato al metodo degli elementi finiti, ai metodi spettrali

e ai metodi ai volumi finiti; inoltre, si considerano i metodi iterativi per risolvere sistemi algebrici (lineari e non) di grandi dimensioni.

Le esercitazioni mirano a addestrare l'allievo all'uso di software matematico per

la risoluzione di problemi ai limiti alle derivate parziali.

Programma

Formulazione variazionale di problemi ai valori al bordo per equazioni alle derivate parziali. Esempi. Metodi di Galerkin e Petrov-Galerkin; legami con i metodi di collocazione. Approssimazione di funzioni mediante funzioni polinomiali

a tratti; elementi finiti e loro proprietà di approssimazione.

Il metodo degli elementi finiti; stabilità, consistenza, convergenza; stime dell'errore a priori e a posteriori; generazione della griglia e adattatività; sistemi algebrici originati da una discretizzazione ad elementi finiti e loro proprietà. Metodi spettrali e loro proprietà.

Metodi di Fourier, Chebishev, Legendre. Uso delle trasformate tra spazio fisico e spazio delle frequenze. Metodo agli elementi spettrali.

Leggi di conservazione e metodi ai volumi finiti. Consistenza e stabilità.

Numero di Courant e condizione CFL.

Diffusione e dispersione numerica. Metodi iterativi per sistemi algebrici di grandi

dimensioni; preconditionamento; metodi di tipo gradiente e di tipo Lanczos; metodi multilivello. Esempi.

Organizzazione dell'insegnamento

Le esercitazioni mirano a addestrare l'allievo all'uso di software matematico per

la risoluzione di problemi ai limiti alle derivate parziali.

Testi richiesti o raccomandati: letture, dispense, altro materiale didattico

P.A: Raviart e J.M. Thomas, Introduzione all'analisi numerica delle equazioni alle derivate parziali, Masson, Milano 1988.

A. Quarteroni and A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer, Berlin 1997.

A. Greenbaum, Iterative methods for solving linear systems, SIAM, Philadelphia, 1997.