Roma, 29 novembre 2013 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 9^a lezione

1) Descrivere il minimo campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ contenente $\mathbb{Q}$ e $\sqrt{2}$: che dimensione ha come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$?

2) Descrivere il minimo campo $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ contenente $\mathbb{Q}$ e $i\sqrt{2}$: che dimensione ha come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$?.

3) Confrontare i due campi degli esercizi 1) e 2): determinare la loro intersezione e dire se uno contiene l'altro.

4) Determinare un omomorfismo suriettivo di anelli unitari $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ e calcolarne il nucleo.

5) Dimostrare che ogni campo di caratteristica zero contiene $\mathbb{Q}$.

6) Dimostrare che l'identità è l'unico omomorfismo di anelli unitari di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$.

7) Dimostrare che per ogni p primo non ci sono omomorfismi di anelli unitari da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}_p$ né da $\mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{Q}$.

8) Dimostrare che ogni campo di caratteristica p ($p \in \mathbb{Z}$ primo) contiene $\mathbb{Z}_p$.

9) Dimostrare che se K è un campo e $f : K \to A$ è un omomorfismo di anelli unitari, allora f è iniettivo.

10) Descrivere il minimo campo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ contenente $\mathbb{Q}$ e $\sqrt[3]{2}$.

11) Fattorizzare $x^4 + 1$ in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$, $\mathbb{Z}_{641}[x]$.

12) Fattorizzare $x^2 - 1$ in $\mathbb{Z}_8[x]$ e dimostrare che $\mathbb{Z}_8[x]$ non è a fattorizzazione unica; $\mathbb{Z}_8[x]$ è un dominio?

13) Fattorizzare i seguenti polinomi in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$:

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2, \quad x^4 + x^3 - x - 1, \quad x^6 - 2x^4 - 5x^2 + 6, \quad x^6 + 4.$$