1) Calcolare il massimo comun divisore in $\mathbb{Q}[x]$ delle seguenti coppie di polinomi:
i) $x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 4, x - 3$;
ii) $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 4, x^2 + x - 2$;
iii) $x^3 - 1, x^2 + x + 1$;
iv) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5, x^2 + x + 7$;
v) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 7, x^2 + x + 7$.

2) Sia $f = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \in \mathbb{Z}[x]$ e si definisca il *contenuto* $c(f)$ di f nel modo seguente: $c(f) \geq 0$, $c(f) = MCD(a_r | r \in \mathbb{N})$.
Dimostrare che:
i) $\forall m \in \mathbb{Z}_+ \; c(mf) = mc(f)$;
ii) se $f \neq 0 \; c(f) = \prod_{p \text{ primo}} p^{min\{n_{r,p} | r \in \mathbb{N}\}}$ dove $\forall r \in \mathbb{N}$ tale che $a_r \neq 0 \; a_r = \prod_{p \text{ primo}} p^{n_{r,p}}$.

3) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ e siano $m, n \in \mathbb{Z}_+$ tali che $mf, nf \in \mathbb{Z}[x]$. Dimostrare che $\frac{1}{m}c(mf) = \frac{1}{n}c(nf)$.

4) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ e si definisca il *contenuto* $c(f)$ di f nel modo seguente:
$c(f) = \frac{1}{m}c(mf) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ dove $m \in \mathbb{Z}_+$ è tale che $mf \in \mathbb{Z}[x]$.
Dimostrare che:
i) $c(f)$ è ben definito;
ii) $c(f) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f \in \mathbb{Z}[x]$;
iii) se $f \in \mathbb{Z}[x]$ le definizioni di contenuto date negli esercizi 2) e 4) coincidono;
iv) se $f \neq 0 \; c(f) = \prod_{p \text{ primo}} p^{min\{n_{r,p} | r \in \mathbb{N}\}}$ dove $\forall r \in \mathbb{N}$ tale che $a_r \neq 0 \; a_r = \prod_{p \text{ primo}} p^{n_{r,p}}$.

5) Dimostrare che $\forall f, g \in \mathbb{Q}[x]$ si ha $c(fg) = c(f)c(g)$.

6) Dimostrare che se $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ e $fg \in \mathbb{Z}[x]$ allora esiste $u \in \mathbb{Q}^*$ tale che $uf, u^{-1}g \in \mathbb{Z}[x]$.

7) Dimostrare che se $f \in \mathbb{Q}[x]$ è tale che $c(f) = 1$ allora f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ se e solo se è riducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

8) Calcolare il massimo comun divisore tra $x^2 + 1$ e $x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$. Determinare i campi K tali che in $K[x]$ si abbia $MCD(x^2 + 1, x + 1) = x + 1$.

9) Fattorizzare il polinomio $x^4 - 4$ in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

10) Dire se esiste un campo K con $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ tale che $x^2 - 2$ sia irriducibile in $K[x]$ e $x^2 + 2$ sia riducibile in $K[x]$.

11) Dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ $x^n - 2$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

12) Dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ $2x^n - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

13) Siano K un campo, $d \in \mathbb{N}$, $K_d[x] = \{f \in K[x] | deg(f) \leq d\}$. Per ogni $f \in K_d[x]$ sia $\varphi_d(f) = x^d f(\frac{1}{x})$. Dimostrare che:
i) φ_d è una ben definita funzione K-lineare di $K_d[x]$ in $K_d[x]$;
ii) $\varphi_d(f)\varphi_{\tilde{d}}(g) = \varphi_{d+\tilde{d}}(fg)$;
iii) se $f = \sum_{r \geq 0} a_r x^r \in K_d[x]$ si ha $\varphi_d(f) = \sum_{r \geq 0} a_{d-r} x^r$.

14) Siano K un campo e $f = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \in K[x]$ con $a_0 a_n \neq 0$. Dimostrare che f è irriducibile se e solo se $\sum_{r=0}^{n} a_{n-r} x^r$ è irriducibile

15) Siano K un campo, $\alpha \in K \setminus \{0\}$, $f = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \in K[x]$, $g = \sum_{r=0}^{n} a_{n-r} x^r$. Dimostrare che $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha^{-1}) = 0$.

16) Siano $n, m \in \mathbb{Z}_+$ e siano $h, r \in \mathbb{N}$ tali che $n = mh + r$ e $0 \leq r < m$.

i) Dimostrare che esiste $q \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $x^n - 1 = (x^m - 1)q + x^r - 1$ e determinare tale q;

ii) calcolare $MCD(x^n - 1, x^m - 1)$.