Roma, 15 novembre 2013 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 7^a lezione

1) Siano X un insieme e $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Un insieme $R \subseteq X$ si dice un insieme di rappresentanti per $\sim$ se $\forall a \in X\ \#(R \cap [a]) = 1$. Trovare un sistema di rappresentanti per l'uguaglianza.

2) Siano X un insieme, $\sim$ una relazione di equivalenza su X, $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione sul quoziente, $R \subseteq X$ un sottoinsieme. Dimostrare che:

i) $\pi\big|_R : R \to X/\sim$ è iniettiva se e solo se $\#(R \cap [a]) \leq 1\ \forall a \in X$;

ii) $\pi\big|_R : R \to X/\sim$ è suriettiva se e solo se $\#(R \cap [a]) \geq 1\ \forall a \in X$;

iii) $\pi\big|_R : R \to X/\sim$ è biunivoca se e solo se R è un insieme di rappresentanti per $\sim$.

3) Siano X un insieme, $\sim$ una relazione di equivalenza su X, $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione sul quoziente, $R \subseteq X$ un inisieme di rappresentanti, $f : X \to R$ definita da $f = (\pi\big|_R)^{-1} \circ \pi$.

i) Dimostrare che $(R, f) \cong (X/\sim, \pi)$;

ii) Descrivere esplicitamente f.

4) Sia $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ e sia $\sim$ la relazione di equivalenza "avere la stessa cardinalità", cioè la relazione di equivalenza definita da $A, B \subseteq \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow \#A = \#B$. Determinare $X/\sim$ e trovare un insieme di rappresentanti per $\sim$.

5) Siano $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\sim$ la relazione di equivalenza "avere la stessa cardinalità", cioè la relazione di equivalenza definita da $A, B \subseteq \mathbb{N} \Leftrightarrow \#A = \#B$. Determinare $X/\sim$ e trovare un insieme di rappresentanti per $\sim$.

6) Siano X, Y due insiemi, $U \subseteq X$, $F = Y^X = \{f : X \to Y\}$, $\sim$ la relazione definita su F da $f \sim g \Leftrightarrow f\big|_U = g\big|_U$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e determinare $F/\sim$.

7) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ continua}\}$ nel modo seguente: $f \sim g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e determinare $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})/\sim$.

8) Sia A un anello unitario e sia $1_A \in A$ l'elemento neutro del prodotto. Dimostrare che $\exists! f : \mathbb{Z} \to A$ omomorfismo di anelli unitari, cioè applicazione tale che $\forall m, n \in \mathbb{Z}\ f(m + n) = f(m) + f(n)$, $f(mn) = f(m)f(n)$, $f(1) = 1_A$.

9) Siano Z un anello unitario, 1_Z l'elemento neutro del prodotto; si supponga che per ogni A e 1_A come nell'esercizio 8) $\exists! f : Z \to A$ omomorfismo di anelli unitari. Si dimostri che $Z \cong \mathbb{Z}$. Più precisamente si dimostri che esiste un unico isomorfismo di anelli unitari tra Z e $\mathbb{Z}$.

10) Sia $n \in \mathbb{Z}$. Determinare gli anelli unitari A tali che esista un omomorfismo di anelli unitari $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to A$. Dato un anello A determinare il numero di omomorfismi di anelli unitari da $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ad A.

11) Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\ \forall k = 0, ..., n$;

ii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;

iii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$;

iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

12) Dimostrare che $2^{2^n} + 1$ è un numero primo per $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e che $641 | 2^{2^5} + 1$. Concludere che $2^{2^5} + 1$ non è primo.