Roma, 8 novembre 2013 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 6^a lezione

1) Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 29) \\ x \equiv 1 & (mod\ 31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 29) \\ x \equiv 0 & (mod\ 31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 0 & (mod\ 29) \\ x \equiv 1 & (mod\ 31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 12 & (mod\ 29) \\ x \equiv 13 & (mod\ 31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \equiv 12 & (mod\ 41) \\ 7x \equiv 19 & (mod\ 51). \end{cases}$$

2) Determinare l'inversa della funzione $f : \mathbb{Z}_{29\cdot 31} \to \mathbb{Z}_{29} \times \mathbb{Z}_{31}$ definita da $f([a]_{29\cdot 31}) = ([a]_{29}, [a]_{31})$.

3) Determinare l'inversa della funzione $f : \mathbb{Z}_{41\cdot 51} \to \mathbb{Z}_{41} \times \mathbb{Z}_{51}$ definita da $f([a]_{41\cdot 51}) = ([a]_{41}, [a]_{51})$.

4) Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (mod\ 4) \\ x \equiv 1 & (mod\ 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (mod\ 4) \\ x \equiv 0 & (mod\ 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 3 & (mod\ 35) \\ x \equiv 14 & (mod\ 25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 3 & (mod\ 35) \\ x \equiv 13 & (mod\ 25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \equiv 5 & (mod\ 7) \\ x \equiv 4 & (mod\ 9) \\ 4x \equiv a & (mod\ 15) \end{cases}$$

5) Si considerino le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $g : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ definite da $f(a) = ([a]_4, [a]_2)$, $g([a]_4, [b]_2) = ([a]_2, [b]_2)$.

i) Dimostrare che g è suriettiva;

ii) determinare l'immagine di $g \circ f$;

iii) determinare l'immagine di f;

iv) dimostrare che f induce una funzione $\bar{f} : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ tale che $f = \bar{f} \circ \pi$ dove $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ è la proiezione naturale ($\pi(a) = [a]_4$);

v) determinare l'immagine di $\bar{f}$ e dire se $\bar{f}$ sia suriettiva;

vi) dimostrare che $\bar{f}$ è iniettiva e determinare l'inversa della funzione $\bar{f} : \mathbb{Z}_4 \to Im(\bar{f})$.

6) Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ e sia $d = (m, n)$. Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} x \equiv a & (mod\ m) \\ x \equiv b & (mod\ n) \end{cases}$$

è risolubile se e solo se $a \equiv b$ $(mod\ d)$.

7) Dimostrare che l'uguaglianza è una relazione d'ordine: si tratta di un ordinamento totale?

8) Sia X un insieme; determinare tutte le relazioni su X che siano contemporaneamente d'ordine e di equivalenza.

9) Sia A un insieme e sia $\sim$ la relazione definita su A nel modo seguente: dati $x, y \in A$ si ha $x \sim y \Leftrightarrow \exists f : x \to y$ biunivoca. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su A.

10) Nell'esercizio 9) sia $A = \mathcal{P}(I_n)$ l'insieme delle parti di $I_n = \{1, ..., n\}$. Descrivere $\mathcal{P}(I_n)/\sim$