Roma, 31 ottobre 2013 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 5^a lezione

1) Risolvere le seguenti congruenze:

$$7x \equiv 1 \ (mod\ 8)$$

$$13x \equiv 1 \ (mod\ 90)$$

$$13x \equiv 1 \ (mod\ 94)$$

$$13x \equiv 22 \ (mod\ 90)$$

$$13x \equiv 22 \ (mod\ 94).$$

2) Determinare l'insieme $\mathbb{Z}_8^*$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8$.

3) Dire se $7 \in \mathbb{Z}_8^*$, se $8 \in \mathbb{Z}_7^*$, se $13 \in \mathbb{Z}_{90}^*$, se $13 \in \mathbb{Z}_{94}^*$, se $6 \in \mathbb{Z}_{20}^*$, se $6 \in \mathbb{Z}_{10}^*$, se $3 \in \mathbb{Z}_{20}^*$.

4) Calcolare $7^{-1} \in \mathbb{Z}_8$, $13^{-1} \in \mathbb{Z}_{90}$, $13^{-1} \in \mathbb{Z}_{94}$, $3^{-1} \in \mathbb{Z}_{10}$.

5) Sia $n \in \mathbb{Z}$. Dato $a \in \mathbb{Z}$ dimostrare che la condizione $(a, n) = 1$ dipende solo dalla classe di equivalenza di a; più precisamente dimostrare che se $a \equiv_n b$ allora $(a, n) = (b, n)$.

6) Risolvere le seguenti congruenze:

$$6x \equiv 1 \ (mod\ 20)$$

$$6x \equiv 13 \ (mod\ 20).$$

7) Dimostrare che la congruenza $6x \equiv 14 \ (mod\ 20)$ è equivalente alla congruenza $3x \equiv 7 \ (mod\ 10)$, cioè che le due congruenze hanno le stesse soluzioni intere. Determinare le soluzioni di $6x \equiv 14 \ (mod\ 20)$ in $\mathbb{Z}_{20}$ e le soluzioni di $3x \equiv 7 \ (mod\ 10)$ in $\mathbb{Z}_{10}$.

8) Dire se la funzione $\mathbb{Z}_{20} \ni [a]_{20} \mapsto [a]_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$ è ben definita e se la funzione $\mathbb{Z}_{10} \ni [a]_{10} \mapsto [a]_{20} \in \mathbb{Z}_{20}$ è ben definita (dati $a, n \in \mathbb{Z}$ si è indicato con $[a]_n$ l'immagine di a in $\mathbb{Z}_n$ tramite la proiezione naturale $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$).

9) Dire per quali $n, m, r \in \mathbb{Z}$ la funzione $\mathbb{Z} \ni [a]_n \mapsto [ra]_m \in \mathbb{Z}_m$ sia ben definita.