Roma, 25 ottobre 2013 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 4^a lezione

1) Sia $(X, \leq)$ un insieme ben ordinato. Dimostrare che $(X, \leq)$ è totalmente ordinato.

2) Siano $(X, \leq)$ un insieme ben ordinato e $Y \subseteq X$. Dimostrare che $(Y, \leq)$ è ben ordinato.

3) Dire se i seguenti insiemi con l'usuale $\leq$ sono ben ordinati:

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

4) Siano (X_1, ρ_1),..., (X_n, ρ_n) insiemi ordinati e (X, ρ) definito nel modo seguente:

$$X = X_1 \times ... \times X_n,$$

$$(a_1, ..., a_n)\rho(b_1, ..., b_n) \Leftrightarrow \exists r \in \{0, ..., n\} \text{ tale che } \begin{cases} a_i = b_i \ \forall i \leq r \\ a_{r+1} \neq b_{r+1} \\ a_{r+1}\rho_{r+1}b_{r+1}. \end{cases}$$

Dimostrare che ρ è un ordinamento su X (ρ si chiama ordinamento lessicografico).

5) Descrivere $X_1 \times ... \times X_n$ nel caso in cui esista $i \in \{1..., n\}$ tale che $X_i = \emptyset$.

6) Siano X, Y insiemi ordinati non vuoti e ρ l'ordinamento lessicografico su $X \times Y$ (v. eserc. 4)). Siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ fissati.

Dimostrare che le funzioni $X \ni x \mapsto (x, y_0) \in X \times Y$ e $Y \ni y \mapsto (x_0, y) \in X \times Y$ sono funzioni iniettive che conservano l'ordinamento.

7) Dire sotto quali condizioni l'ordinamento ρ definito nell'esercizio 4) è un ordinamento totale e sotto quali condizioni è un buon ordinamento.

8) Si considerino gli ordinamenti lessicografici (v. eserc. 4)) indotti dagli usuali ordinamenti su $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ e su $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ e dimostrare che si tratta di buoni ordinamenti.

9) Si considerino $\mathbb{N}$ con l'usuale ordinamento ed $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ con gli ordinamenti lessicografici (v. eserc. 8). Dire se questi insiemi ben ordinati siano isomorfi, o se tra questi ce ne siano due isomorfi o se siano tutti non isomorfi (come insiemi ordinati).

10) Sia ρ la relazione definita su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nel modo seguente:

$$(m, n)\rho(m', n') \Leftrightarrow \begin{cases} m + n < m' + n' \\ \text{oppure} \\ m + n = m' + n' \text{ e } m \leq m'. \end{cases}$$

Dinostrare che ρ è una relazione d'ordine e che $(\mathbb{N}, \rho) \cong (\mathbb{N}, \leq)$.

11) Sia $n \in \mathbb{Z}$ e sia $\equiv_n$ la congruenza modulo n su $\mathbb{Z}$. Descrivere l'identificazione $\{0, ..., n-1\}$ con $\{[a] | a \in \mathbb{Z}\}$ dove $[a] = \{m \in \mathbb{Z} | m \equiv_n a\}$ e la proiezione naturale $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\equiv_n$.

12) Sia $(X, \sim)$ un insieme con relazione di equivalenza e si supponga che la proiezione sul quoziente $\pi : X \to X/\sim$ sia iniettiva. Determinare $\sim$.

13) Dire per quali $n \in \mathbb{Z}$ la nozione di parità è ben definita (e consistente con la nozione di parità in $\mathbb{Z}$) in $\mathbb{Z}/\equiv_n$, cioè per quali $n \in \mathbb{Z}$ esistono $P_n, D_n \subseteq \mathbb{Z}/\equiv_n$ tali che per ogni $a \in \mathbb{Z}$ si abbia a pari $\Leftrightarrow \pi(a) \in P_n$ e a dispari $\Leftrightarrow \pi(a) \in D_n$.

14) Siano $p : \mathbb{Z} \to \{P, D\}$ la funzione definita da $p(m) = \begin{cases} P & \text{se } 2|m \\ D & \text{se } 2 \not| m, \end{cases}$ $n \in \mathbb{Z}$ e $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\equiv_n$ la proiezione naturale. Osservare che l'esercizio 13) è equivalente alla seguente domanda: per quali $n \in \mathbb{Z}$ la funzione $p : (\mathbb{Z}, \equiv_n) \to (\{P, D\}, =)$ conserva la relazione? cioè per quali $n \in \mathbb{Z}$ si ha che $(a \equiv_n b \Rightarrow p(a) = p(b))$?