Roma, 11 ottobre 2013 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 2^a lezione

1) Siano X un insieme e P una proprietà; $\{x \in X | P(x)\}$ è un insieme.
Descrivere $\{x \in X | x \neq x\}$ e $\{x \in X | x \notin X\}$

2) Dimostrare che esiste al più un insieme (denotato con $\emptyset$) con la proprietà che $x \notin \emptyset \ \forall x$; $\emptyset$ si chiama l'insieme vuoto. Dimostrare che se esiste un insieme (assioma di esistenza) esiste anche $\emptyset$.

3) Dire se la frase "$\forall x \in \emptyset$ vale $P(x)$" sia vera o falsa, e scrivere la sua negazione.

4) Siano X, Y insiemi; descrivere $\{x \in X | x \in Y\}$;

5) Siano I un insieme non vuoto, $i_0 \in I$, Y_i un insieme per ogni $i \in I$ e si definisca $\cap_{i \in I} Y_i = \{x \in Y_{i_0} | x \in Y_i \ \forall i \in I\}$.
i) Dimostrare che questa definizione non dipende dall'elemento i_0 scelto.
ii) sia $J \subseteq I$; dimostrare che $\cap_{i \in I} Y_i \subseteq \cap_{i \in J} Y_i$;
iii) siano J_1, J_2 insiemi tali che $I = J_1 \cup J_2$; dimostrare che $\cap_{i \in I} Y_i = (\cap_{i \in J_1} Y_i) \cap (\cap_{i \in J_2} Y_i)$;
iv) si può definire $\cap_{i \in \emptyset} Y_i$ in modo coerente con i punti ii) e iii)?

6) $\forall r \in \mathbb{R}$ siano $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ e $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$.
Determinare $\cap_{r \in \mathbb{R}} S_r$, $\cap_{r \in \mathbb{R}} D_r$, $\cap_{r > 0} S_r$, $\cap_{r > 0} D_r$ e, per $s \in \mathbb{R}$, $\cap_{r \geq s} S_r$, $\cap_{r \geq s} D_r$, $\cap_{r > s} S_r$, $\cap_{r > s} D_r$;

7) (Paradosso di Russell) Siano U l'insieme di tutti gli insiemi e $F = \{x \in U | x \notin x\}$. Dire se $F \in F$ e dedurre che la collezione di tutti gli insiemi non esiste (non è un insieme).

8) Siano I un insieme e Y_i un insieme per ogni $i \in I$. Si chiama unione degli Y_i, e si indica con $\cup_{i \in I} Y_i$, un insieme con la proprietà $x \in \cup_{i \in I} Y_i \Leftrightarrow \exists i \in I$ tale che $x \in Y_i$. $\cup_{i \in I} Y_i$ è un insieme (assioma dell'unione).
Dimostrare che per ogni famiglia di funzioni $f_i : Y_i \to X$ tale che $f_i\big|_{Y_i \cap Y_j} = f_j\big|_{Y_i \cap Y_j}$ esiste un unica funzione $f : \cup_{i \in I} Y_i \to X$ tale che $f\big|_{Y_i} = f_i \ \forall i \in I$.

9) Con le notazioni dell'esercizio 6) descrivere $\cup_{r \in \mathbb{R}} S_r$, $\cup_{r \in \mathbb{R}} D_r$, $\cup_{r > 0} S_r$, $\cup_{r > 0} D_r$ e, per $s \in \mathbb{R}$, $\cup_{r \leq s} S_r$, $\cup_{r \leq s} D_r$, $\cup_{r < s} S_r$, $\cup_{r < s} D_r$.

10) Siano I un insieme e Y_i un insieme per ogni $i \in I$. Si chiama unione disgiunta degli Y_i, e si indica con $\coprod_{i \in I} Y_i$, un insieme con funzioni $\gamma_i : Y_i \to \coprod_{j \in I} Y_j$, con la seguente proprietà: per ogni famiglia di funzioni $f_i : Y_i \to X$ esiste un'unica funzione $f : \coprod_{i \in I} Y_i \to X$ tale che $f \circ \gamma_i = f_i \ \forall i \in I$.
i) Osservare che se $Y_i \cap Y_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ allora $\coprod_{i \in I} Y_i = \cup_{i \in I} Y_i$;
ii) in generale dimostrare che γ_i è iniettiva per ogni $i \in I$, che $\gamma_i(Y_i) \cap \gamma_j(Y_j) = \emptyset$ $\forall i \neq j \in I$ e che $\coprod_{i \in I} Y_i = \cup_{i \in I} \gamma_i(Y_i)$;
iii) siano X un insieme ed $f_i : Y_i \to X$ funzioni iniettive tali che $f_i(Y_i) \cap f_j(Y_j) = \emptyset$ $\forall i \neq j \in I$; dimostrare che $\cup_{i \in I} f_i(Y_i) = \coprod_{i \in I} Y_i$;
iv) in generale dimostrare che esiste un'unica funzione $\pi : \coprod_{i \in I} Y_i \to \cup_{i \in I} Y_i$ tale che per ogni $i \in I$ $\pi \circ \gamma_i$ sia l'inclusione di Y_i in $\cup_{i \in I} Y_i$; dimostrare che π è suriettiva;
v) in generale descrivere $\coprod_{i \in I} Y_i$ come sottoinsieme di $(\cup_{i \in I} Y_i) \times I$.