Esercitazioni di Algebra 1 - a.a. 2021/2022 (Ilaria Damiani)
20/10/2021

1) Un insieme ordinato $(X, \leq)$ si dice "ben ordinato" se $\forall Y \subseteq X$ tale che $Y \neq \emptyset$ esiste $min_{\leq} Y$.

i) Dire se $(\mathbf{N}, \leq)$ e $(\mathbf{N}, \geq)$ sono ben ordinati.

ii) Dimostrare che ogni sottoinsieme di un insieme ben ordinato è ben ordinato.

iii) Dimostrare che ogni insieme ben ordinato è totalmente ordinato e che il viceversa è falso.

iv) Dimostrare che ogni insieme finito totalmente ordinato è ben ordinato.

2) Si consideri l'insieme $\Omega = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ (unione disgiunta) con la relazione $\preceq$ definita nel modo seguente;

$$x \preceq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbf{N} \ e \ x \leq y \\ oppure \\ y = \infty. \end{cases}$$

Dimostrare che $\preceq$ è un ordinamento e che $(\Omega, \preceq)$ è ben ordinato. Dire se $(\Omega, \succeq)$ sia ben ordinato.

3) Siano $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$ due insiemi ordinati; si dice che una funzione $f : X \to Y$ conserva l'ordinamento (o equivalentemente che f è un morfismo di insiemi ordinati) se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \preceq f(x_2)$.

i) Dimostrare che le inclusioni naturali $\mathbf{N} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ conservano l'ordinamento.

ii) L'identità conserva l'ordinamento? Una funzione costante conserva l'ordinamento?

iii) Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e si consideri l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$; dire se l'immersione $X \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ conserva l'ordinamento.

iv) Dimostrare che la composizione di morfismi di insiemi ordinati è un morfismo di insiemi ordinati.

v) f si dice isomorfismo tra insiemi ordinati se f è invertibile (quindi in particolare f è biunivoca) e f e f^{-1} sono morfismi di insiemi ordinati. Dimostrare che un morfismo biunivoco di insiemi ordinati non è necessariamente un isomorfismo di insiemi ordinati. Dimostrare che f è un isomorfismo di insiemi ordinati se e solo se f è biunivoco e si ha $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \preceq f(x_2)$.

vi) $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ si dicono isomorfi (come insiemi ordinati) se esiste un isomorfismo di insiemi ordinati $f : X \to Y$; dimostrare che $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sono a due a due non isomorfi.

4) Dimostrare che $(\mathbf{Z}, \leq) \cong (\mathbf{Z}, \geq)$ e che $(\mathbf{N}, \leq) \not\cong (\mathbf{N}, \geq)$. Dire se $(\Omega, \preceq)$ sia isomorfo a uno tra $(\mathbf{Z}, \leq)$, $(\mathbf{Z}, \geq)$, $(\mathbf{N}, \leq)$, $(\mathbf{N}, \geq)$.

5) Sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $\sim_f$ la relazione in X definita nel modo seguente:

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

i) Dimostrare che $\sim_f$ è una relazione di equivalenza.

ii) Dimostrare che $cl(x) \mapsto f(x)$ è una ben definita funzione $\bar{f} : X/\sim_f$ in Y: $\bar{f}$ è iniettiva? è suriettiva? qual è la sua immagine?

iii) È vero o falso che $\bar{f}$ determina una corrispondenza biunivoca tra $X/\sim_f$ e $Im(f) = f(X)$?