Esercitazioni di Algebra 1 - a.a. 2021/2022 (Ilaria Damiani)
20/10/2021

1) Siano X un insieme con n elementi e Y un insieme con m elementi. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:
i) $\{\varphi : X \to Y\}(= Y^X)$;
ii) $\{\varphi : X \to Y | \varphi \text{ iniettiva}\}$;
iii) $\{\varphi : X \to Y | \varphi \text{ biunivoca}\}(= \mathcal{S}_X)$.
iv) Sia $S_{n,m} = \#\{\varphi : X \to Y | \varphi \text{ suriettiva}\}$; dimostrare che

$$S_{n,m} = \sum_{k>0} \binom{n}{k} S_{n-k,m-1}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} S_{n,k} = m^n.$$

$$S_{n,m} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

v) Che cosa si può dire delle funzioni/funzioni iniettive/funzioni suriettive da X a Y se $X = \emptyset$ oppure $Y = \emptyset$? Osservare che l'esistenza di una funzione iniettiva da X a Y NON equivale all'esistenza di una funzione suriettiva da Y a X.

2) Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Dimostrare che:
i) il minimo di X se esiste è unico e il massimo di X se esiste è unico.
ii) Elementi minimali (rispettivamente massimali) in X possono non esistere, oppure possono esistere e non essere unici.
iii) Il minimo di X, se esiste, è minimale in X; più precisamente: se esiste il minimo di X, esiste un unico elemento minimale in X (e coincide con il minimo di X).
iv) La seguente affermazione è falsa: se esiste un unico elemento minimale in X allora esiste il minimo di X.
v) Se $(X, \leq)$ è totalmente ordinato, un elemento $x_0 \in X$ è massimale se e solo se è massimo.