Esercitazioni di Algebra 1 - a.a. 2021/2022 (Ilaria Damiani)
13/10/2021

1) Dire se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive, biunivoche:
i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^2$; $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita da $f(x) = x^2$;
ii) fissato $a \in \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x + a$;
iii) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = x + y$;
iv) fissati due insiemi X e Y e un elemento $a \in X$, $f : Y^X \to Y$ definita da $f(\varphi) = \varphi(a)$;
$[Y^X = \{\varphi : X \to Y\}]$

2) Fissati due insiemi X e Y e una funzione $f : X \to Y$, sia $F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definita da $F(U) = f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$.
i) Determinare $F(U)$ per f come in i), ii), iii) e $U = \{-1\}$, $\{0\}$, $\emptyset$, $\{t \in \mathbf{R} | -1 \leq t \leq 1\}$, $\mathbf{R}_{\geq 0}$.
ii) Dimostrare che F è iniettiva se e solo se f è suriettiva e che F è suriettiva se e solo se f è iniettiva.
iii) F dipende da f; più precisamente esiste una funzione Φ tale che $F = \Phi(f)$. Quali sono il dominio e il codominio di Φ? Dimostrare che Φ è iniettiva.
[NB: non affrontato a lezione]

3) Siano X un insieme con n elementi e Y un insieme con m elementi. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:
i) $\{\varphi : X \to Y\} (= Y^X)$;
ii) $\{\varphi : X \to Y | \varphi \text{ iniettiva}\}$;
iii) $\{\varphi : X \to Y | \varphi \text{ biunivoca}\} (= \mathcal{S}_X)$.
iv) Sia $S_{n,m} = \#\{\varphi : X \to Y | \varphi \text{ suriettiva}\}$; dimostrare che

$$S_{n,m} = \sum_{k>0} \binom{n}{k} S_{n-k,m-1}$$

$$\sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} S_{n,k} = m^n.$$

$$S_{n,m} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

v) Che cosa si può dire delle funzioni/funzioni iniettive/funzioni suriettive da X a Y se $X = \emptyset$ oppure $Y = \emptyset$? Osservare che l'esistenza di una funzione iniettiva da X a Y NON equivale all'esistenza di una funzione suriettiva da Y a X.
[NB: non ancora affrontato a lezione]

4) Esempi di insiemi (totalmente) ordinati: $(\mathbf{N}, \leq)$, $(\mathbf{Z}, \leq)$, $(\mathbf{Q}, \leq)$, $(\mathbf{R}, \leq)$.
$[\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}]$
Dimostrare che:

i) $(\mathbf{N}, \leq)$ ha minimo (determinarlo); $(\mathbf{Z}, \leq)$, $(\mathbf{Q}, \leq)$, $(\mathbf{R}, \leq)$ non hanno minimo.

[In un insieme ordinato $(X, \leq)$ si chiama "minimo di X" (e si scrive $min_{\leq}(X)$) un elemento $x_0 \in X$ tale che $\forall x \in X$ si ha $x_0 \leq x$; si chiama "massimo di X" (e si scrive $max_{\leq}(X)$) un elemento $x_1 \in X$ tale che $\forall x \in X$ si ha $x \leq x_1$]

ii) $\forall n \in \mathbf{Z} \not\exists m \in \mathbf{Z}$ tale che $n < m < n+1$; $(\mathbf{Q}, \leq)$ ed $(\mathbf{R}, \leq)$ hanno la proprietà che $x < y \Rightarrow \exists z$ tale che $x < z < y$.

5) Si consideri la relazione "essere divisore di" definita in $\mathbf{N}$: $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{N}$ tale che $b = ac$.

i) Dimostrare che $(\mathbf{N}, |)$ è un insieme ordinato, ma non totalmente ordinato.

ii) Dimostrare che $\mathbf{N}$ ha minimo e massimo e determinare $min_{|}(\mathbf{N})$ e $max_{|}(\mathbf{N})$.

iii) Dimostrare che $\mathbf{N} \setminus \{1\}$ non ha minimo.

iv) Trovare, se esistono, gli elementi minimali di $\mathbf{N} \setminus \{1\}$ e gli elementi massimali di $\mathbf{N} \setminus \{0\}$.

[In un insieme ordinato $(X, \leq)$ un elemento $x_0 \in X$ si dice "minimale" in X se $x \in X$, $x \leq x_0 \Rightarrow x = x_0$; un elemento $x_1 \in X$ si dice "massimale" in X se $x \in X$, $x_1 \leq x \Rightarrow x = x_1$]

6) Sia X un insieme e si consideri la relazione di inclusione nell'insieme $P = \mathcal{P}(X)$.

i) Dimostrare che $(P, \subseteq)$ è un insieme ordinato: per quali insiemi X si ha che P è totalmente ordinato?

ii) Dimostrare che P ha minimo e massimo e determinare $min_{\subseteq}(P)$ e $max_{\subseteq}(P)$.

iii) Trovare, se esistono, gli elementi minimali e massimali di $P \setminus \{\emptyset, X\}$.

7) Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Dimostrare che:

i) il minimo di X se esiste è unico e il massimo di X se esiste è unico.

ii) Elementi minimali (rispettivamente massimali) in X possono non esistere, oppure possono esistere e non essere unici.

iii) Il minimo di X, se esiste, è minimale in X; più precisamente: se esiste il minimo di X, esiste un unico elemento minimale in X (e coincide con il minimo di X).

iv) La seguente affermazione è falsa: se esiste un unico elemento minimale in X allora esiste il minimo di X.