Esercitazioni di Algebra 1 - a.a. 2021/2022 (Ilaria Damiani)
08/10/2021

1) Un'affermazione P può avere significato in sé oppure dipendere da uno o più dati (per esempio l'affermazione "il numero intero n è pari" dipende da n); in tal caso per sottolineare la dipendenza da un dato D si scrive $P(D)$ oppure P_D.
Da che dati dipendono le affermazioni seguenti? Sono frasi vere o frasi false?

i) $n^2 = 1$.
ii) $\forall n \in \mathbf{Z}\ n^2 = 1$.
iii)$\exists n \in \mathbf{Z}\ n^2 = 1$.
(Descrivere $\{n \in \mathbf{Z} | n^2 = 1\}$)
iv) Per ogni intero n, m divide n.
[NB Per due numeri interi a e b si dice che a divide b, e si scrive $a|b$, se $\exists c$ intero tale che $b = ac$]
(Descrivere $\{m \in \mathbf{Z} | \forall n \in \mathbf{Z}$, m divide $n\}$)
v) Per ogni intero n, n divide m.
(Descrivere $\{m \in \mathbf{Z} | \forall n \in \mathbf{Z}$, n divide $m\}$)
vi) $k|n \Rightarrow k|m$.
(Fare esempi di numeri interi n, m per i quali la frase vi) è vera e di numeri n, m per i quali la frase vi) è falsa.
Determinare $\{(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} | k|n \Rightarrow k|m\}$).

2) Sia P una frase; si indica con $-P$ la negazione di P, cioè la frase definita dalla seguente proprietà:
"$-P$ è vera se P è falsa ed è falsa se P è vera". Equivalentemente "$-P$" signfica "P è falsa".
Tenendo conto che due frasi P e Q si equivalgono quando P è vera se e solo se Q è vera, osservare che $-(-P)$ e P si equivalgono.
Dimostrare che la frase "$-(\forall x P(x))$" equivale alla frase "$\exists x$ tale che $-P(x)$".
Dimostrare che la frase "$-(\exists x$ tale che $P(x))$" equivale alla frase "$\forall x - P(x)$".

3) Dire se le seguenti frasi sono vere e scrivere la loro negazione:
i) $x \in \emptyset$;
ii) $\exists x \in \emptyset$;
iii) $\exists x \in \emptyset$ tale che $P(x)$;
iv) $\forall x \in \emptyset\ P(x)$;
v) $x \in \emptyset \Rightarrow P(x)$.

4) Sia X un insieme; determinare il suo sottoinsieme $Y = \{x \in X | x \neq x\}$.

5) Il paradosso di Russell: l'"insieme" di tutti gli insiemi non è un insieme. Più precisamente: non esiste un insieme $\mathcal{U}$ tale che per ogni insieme x si abbia $x \in \mathcal{U}$. Sia $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{U} | x \notin x\}$; dire se $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$.

6) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Per quali $b \in Y$ l'equazione $f(x) = b$ è risolubile? Quante soluzioni ha questa equazione?