Roma, 26 ottobre 2017 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 4^a lezione

1) Sia $\sim$ la relazione su $\mathbb{R}$ definita nel modo seguente: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che:
i) $\sim$ è una relazione di equivalenza;
ii) l'intervallo $[0, 1[$ è un insieme di rappresentanti;
iii) $\mathbb{R}/\sim \cong S^1 (= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\})$.

2) Dire se le seguenti congruenze siano risolubili, e in caso affermativo risolverle:
i) $7x \equiv 1\ (mod\ 8)$;
ii) $13x \equiv 1\ (mod\ 90)$;
iii) $13x \equiv 22\ (mod\ 90)$;
iv) $13x \equiv 1\ (mod\ 94)$;
v) $13x \equiv 22\ (mod\ 94)$;
vi) $6x \equiv 1\ (mod\ 20)$;
vii) $6x \equiv 13\ (mod\ 20)$;
viii) $6x \equiv 12\ (mod\ 20)$;
ix) $18x \equiv 21\ (mod\ 102)$;
x) $18x \equiv 24\ (mod\ 102)$.

3) Negli esempi seguenti dire se m sia invertibile in $\mathbb{Z}_n$, e in caso affermativo determinarne l'inverso:
i) $m = 7$, $n = 8$;
ii) $m = 8$, $n = 7$;
iii) $m = 13$, $n = 90$;
iv) $m = 13$, $n = 94$;
v) $m = 6$, $n = 20$;
vi) $m = 6$, $n = 10$;
vii) $m = 3$, $n = 20$;

4) Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ e sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ la funzione definita da $f(a) = ([a]_m, [a]_n)$.
Dimostrare che:
i) $f = g \circ \pi$ dove $\pi : \mathbb{Z} \ni a \mapsto [a]_k \in \mathbb{Z}_k$, $k = mcm(m, n)$, $g([a]_k) = ([a]_m, [a]_n)$;
ii) g è iniettiva;
iii) g è suriettiva se e solo se $(m, n) = 1$.

Esercizi da svolgere a casa che riprenderemo alla prossima lezione.
I) Nell'esercizio 4) determinare l'immagine di g.

II) Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 29) \\ x \equiv 0 & (mod\ 31), \end{cases} \begin{cases} x \equiv 0 & (mod\ 29) \\ x \equiv 1 & (mod\ 31), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 29) \\ x \equiv 1 & (mod\ 31), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 29) \\ x \equiv -1 & (mod\ 31), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 12 & (mod\ 29) \\ x \equiv 13 & (mod\ 31), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \equiv 12 & (mod\ 41) \\ 7x \equiv 19 & (mod\ 51), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (mod\ 4) \\ x \equiv 1 & (mod\ 2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (mod\ 4) \\ x \equiv 0 & (mod\ 2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 3 & (mod\ 35) \\ x \equiv 14 & (mod\ 25). \end{cases}$$