Roma, 20 ottobre 2017 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) $3^a$ lezione

1) Siano $A$ un insieme e $\subseteq$ la relazione "essere contenuto" definita in $X = \mathcal{P}(A)$. Dimostrare che $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è un insieme ordinato.
Provare che questo ordinamento è un ordinamento totale se e solo se $\#A \leq 1$.
Provare che il minimo di $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è $\emptyset$ e che il massimo di $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è $A$.
Determinare minimali e massimali di $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}, \subseteq)$.

2) Sia $n \in \mathbb{N}$. Provare che:
i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;
ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$
iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

3) Siano $n, d \in \mathbb{N}$. Contare il numero di monomi in $n$ variabili di grado $d$, cioè $\#\{(m_1, ..., m_n) | m_i \in \mathbb{N}\ \forall i = 1, ..., n \text{ e } \sum_{i=1}^{n} m_i = d\}$.

4) Provare che per ogni $X$ insieme si ha $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

5) Il paradosso di Russell (l'insieme di tutti gli insiemi non esiste, ovvero la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme).
Supponiamo che l'insieme di tutti gli insiemi sia un insieme, cioè che esista un insieme $\mathcal{U}$ definito dalla proprietà $x \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x$ è un insieme.
Si consideri $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{U} | x \notin x\}$. Osservare che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$.
Dire se $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$.

6) Determinare il massimo comun divisore $d$ di 45 e 7 e trovare una coppia $(a, b)$ di numeri interi tali che $d = 45a + 7b$.

7) Determinare il massimo comun divisore $d$ di 125 e 13 e trovare una coppia $(a, b)$ di numeri interi tali che $d = 125a + 13b$.

8) Siano $a = ma'$, $b = mb'$, $d = MCD(a, b)$, $d' = MCD(a', b')$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $d = md'$. Osservare che $d = ax + by \Leftrightarrow d' = a'x + b'y$.

9) Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. È ben noto che esistono $q, r \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < |b|$ tali che $a = bq + r$.
Dimostrare che tale affermazione può essere modificata nella seguente:
Esistono $q, r \in \mathbb{Z}$ con $|r| \leq \frac{|b|}{2}$ tali che $a = bq + r$.

**Esercizi da svolgere a casa che riprenderemo alla prossima lezione.**

I) Sia $\sim$ la relazione su $\mathbb{R}$ definita nel modo seguente: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e determinarne classi di equivalenza e quoziente.

II) Si considerino gli insiemi $X$ e $Y$ definiti nel modo seguente:

$$X = \{(m_1, ..., m_n) | m_i \in \mathbb{N}\ \forall i = 1, ..., n \text{ e } \sum_{i=1}^{n} m_i = d\},$$

$$Y = \{(l_1, ..., l_{n-1}) | 0 \leq l_i < l_{i+1} < n + d - 1\ \forall i = 1, ..., n - 2\};$$

sia $\varphi : X \to Y$ definita da

$$\varphi(m_1, ..., m_n) = (l_1, ..., l_{n-1}) \text{ con } l_i = \sum_{j=1}^{i} m_j + i - 1 \ \forall i = 1, ..., n-1.$$

Dimostrare che:
i) $\varphi$ è ben definita, cioè effettivamente $\varphi(m) \in Y \ \forall m \in X$;
ii) $\varphi$ è biunivoca: si costruisca $\psi : Y \to X$ tale che $\psi \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \psi = id_Y$.