Roma, 13 ottobre 2017 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 2^a lezione

1) Sia R la relazione definita in $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente:

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Provare che R è riflessiva, simmetrica (e non antisimmetrica), transitiva quindi una relazione di equivalenza; determinare le classi di equivalenza; determinare il quoziente; trovare un insieme di rappresentanti.

2) Provare che l'unica relazione riflessiva simmetrica e antisimmetrica è l'uguaglianza.

3) Siano $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato e $\sim$ la relazione definita da $f \sim g \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$. Provare che R è riflessiva, simmetrica, transitiva quindi una relazione di equivalenza; determinare le classi di equivalenza; determinare il quoziente; trovare un insieme di rappresentanti.

4) Sia $f : X \to Y$ una funzione e si definisca la relazione $\sim_f$ in X nel modo seguente: $x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Dimostrare che $\sim_f$ è una relazione di equivalenza e che $X/\sim_f$ è in corrispondenza biunivoca con $Im(f) = f(X)$.

5) Sia R la relazione dell'esercizio 1). Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to Y$ tale che R sia $\sim_f$ (v. esercizio 4). Utilizzando l'esercizio 4) determinare il quoziente $\mathbb{R}^2/\sim_f = \mathbb{R}^2/R$ e confrontarlo con quanto trovato nell'esercizio 1).

6) Sia $\sim$ la relazione dell'esercizio 3). Trovare una funzione $f : \mathcal{F} \to Y$ tale che $\sim$ sia $\sim_f$ (v. esercizio 4). Utilizzando l'esercizio 4) determinare il quoziente $\mathcal{F}/\sim_f = \mathcal{F}/R$ e confrontarlo con quanto trovato nell'esercizio 3).

7) Sia $| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (divisibilità) la relazione definita nel modo seguente:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = mk.$$

Dimostrare che $|$ è riflessiva, non è simmetrica, non è antisimmetrica, è transitiva.

8) Sia $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (divisibilità) la relazione definita nel modo seguente:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = mk.$$

Dimostrare che $|$ è riflessiva, non è simmetrica, è antisimmetrica, è transitiva. In particolare $|$ è un ordinamento. Determinare massimo e minimo di $(\mathbb{N}, |)$. Determinare gli elementi minimali e massimali di $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$.

9) Sia $| \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (divisibilità) la relazione definita nel modo seguente:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Q} \text{ tale che } n = mk.$$

Dimostrare che $|$ è riflessiva, non è simmetrica, non è antisimmetrica, è transitiva.

10) Sia $| \subseteq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (Q \setminus \{0\})$ (divisibilità) la relazione definita nel modo seguente:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ tale che } n = mk.$$

Dimostrare che $|$ è riflessiva, è simmetrica, non è antisimmetrica, è transitiva. In particolare $|$ è una relazioe di equivalenza. Determinare le classi di equivalenza e il quoziente.

Esercizi da svolgere a casa che riprenderemo alla prossima lezione.

I) Siano A un insieme e $\subseteq$ la relazione "essere contenuto" definita in $X = \mathcal{P}(A)$. Dimostrare che $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ è un insieme ordinato. Dire quando questo ordinamento è un ordinamento parziale Trovare minimo e massimo di $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Siano m il minimo e M il massimo di $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Determinare minimali e massimali di $(\mathcal{P}(A) \setminus \{m, M\}, \subseteq)$.

II) Sia $n \in \mathbb{N}$. Calcolare:
i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;
ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;
iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.