Roma, 4 ottobre 2017 Esercitazioni di algebra 1 (Damiani) 1^a lezione

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e scrivere la loro negazione:
i) 4 è pari;
ii) n è pari;
iii) $2|6$ e $3|6$;
iv) $2|6$ oppure $3|6$;
v) $4|6$ e $3|6$;
vi) $4|6$ oppure $3|6$;
vii) $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $n + m = 0$;
viii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $n + m = 0$;
ix) $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\forall m \in \mathbb{N}$ $n + m = 0$;
x) $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\exists m \in \mathbb{Z}$ tale che $n + m = 0$;
xi) $\exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $\forall m \in \mathbb{Z}$ $n + m = 0$.

2) Osservare che $P \Rightarrow Q$ ("P implica Q") significa $-(P$ e $-Q)$; dedurre che se P è vera e $P \Rightarrow Q$ è vera allora Q è vera; ma il fatto che $P \Rightarrow Q$ sia vera non dice nulla sulla verità di P o sulla verità di Q.

3) Osservare che $P \Rightarrow Q$ non equivale a $Q \Rightarrow P$; $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ si scrive anche $P \Leftrightarrow Q$ ("P se e solo se Q").

4) Osservare che $P \Rightarrow Q$ equivale a $(-Q) \Rightarrow (-P)$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e scrivere la loro negazione:
i) $4|n \Rightarrow 2|n$;
ii) $2|n \Rightarrow 4|n$;
iii) $6|n \Rightarrow 2|n$ e $3|n$;
iv) $2|n$ e $3|n \Rightarrow 6|n$;
v) n pari $\Rightarrow n + 2$ pari;
vi) n pari $\Rightarrow n + 1$ dispari.

6) L'uguaglianza in un insieme X è una relazione di equivalenza; la disuguaglianza in un insieme X non è una relazione di equivalenza.

7) Siano: X un insieme; $a, b \in X$; $R \subseteq X \times X$ una relazione di equivalenza. Dimostrare che (se se si indica con $[x]$ la classe di equivalenza di x) allora $a \in [b] \Leftrightarrow [a] = [b]$; dimostrare che in generale non è vero che $a \in [b] \Leftrightarrow a = b$.

8) Dimostrare che $\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2k\} \cup \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2k + 1\}$. Osservare che per tale dimostrazione si usa la seguente proprietà dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali: ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo.

9) Si chiama congruenza modulo 2 la relazione $\equiv_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita nel modo seguente:

$$m \equiv_2 n \Leftrightarrow 2|(n - m).$$

Dimostrare che $\equiv_2$ è una relazione di equivalenza e determinare tutte le classi di equivalenza.

10) Si chiama congruenza modulo 3 la relazione $\equiv_3 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita nel modo seguente:

$$m \equiv_3 n \Leftrightarrow 3|(n - m).$$

Dimostrare che $\equiv_3$ è una relazione di equivalenza e determinare tutte le classi di equivalenza.

Esercizi da svolgere a casa che riprenderemo alla prossima lezione.
I) Sia R la relazione definita in $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente:

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Dire se R sia riflessiva, se sia simmetrica, se sia antisimmetrica, se sia transitiva; dire se R sia una relazione di equivalenza; dire se R sia una relazione d'ordine; nel caso che R sia una relazione di equivalenza determinarne le classi di equivalenza.

II) Sia $| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (divisibilità) la relazione definita nel modo seguente:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = mk.$$

Dire se $|$ sia riflessiva, se sia simmetrica, se sia antisimmetrica, se sia transitiva; dire se $|$ sia una relazione di equivalenza; dire se $|$ sia una relazione d'ordine; nel caso che $|$ sia una relazione di equivalenza determinarne le classi di equivalenza.

III) Ripetere l'esercizio II) sostituendo a $\mathbb{Z}$:
i) $\mathbb{N}$;
ii) $\mathbb{Q}$;
iii) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.