Teoria delle rappresentazioni 1
a.a. 2019/2020 - Ilaria Damiani
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Secondo semestre: 02/03/2020-12/06/2020

Programma d'esame

1. Rappresentazioni degli anelli - la categoria degli A-moduli.
Oggetti e morfismi della categoria A-mod. Nozione di sottomodulo, nucleo, quoziente. I tre teoremi di isomorfismo. Intersezione, somma, somma diretta, prodotto diretto; sistemi di generatori; moduli finitamente generati e moduli ciclici. Relazioni; insiemi indipendenti; basi e moduli liberi. Funtori aggiunti; l'aggiunto sinistro del funtore dimenticanza.

Esempi: moduli su un campo K, su $\mathbb{Z}$, su $K[x]$; moduli compatibili con una struttura di spazio vettoriale (rappresentazioni lineari). Le rappresentazioni dei gruppi come caso particolare delle rappresentazioni di anelli: l'algebra gruppo RG.

Riferimenti bibliografici:
Curtis and Reiner: capitolo II, sezione 11;
Lang: capitolo III, paragrafi 1-4.

2. Algebra multilineare e tensoriale.
Prodotto tensoriale su un anello commutativo: definizione (proprietà universale), esistenza (costruzione) e unicità (funtorialità). Generatori, tensori semplici, rango. Proprietà del prodotto tensoriale (su un anello commutativo): commutatività, distributività rispetto alla somma diretta, associatività; l'anello base è l'elemento neutro.

Applicazione: il teorema di Dehn (terzo problema di Hilbert).

Algebre su un anello (commutativo); algebra tensoriale e proprietà universale; la categoria delle R-algebre associative; generatori e relazioni; algebre graduate. Prodotto simmetrico, algebra simmetrca e anello dei polinomi; la categoria delle R-algebre commutative. Prodotto esterno, determinante e algebra esterna.

Prodotto tensoriale su un anello qualsiasi; restrizione ed estensione di scalari.

Riferimenti bibliografici:
Curtis and Reiner: capitolo II, sezione 12, paragrafi 1-12;
Etingof: paragrafi, 1.1, 2.1, 2.5, 2.6;
Lang: capitolo XVI, paragrafi 1, 2, 4-8.

3. Presentazione dei gruppi per generatori e relazioni.
Monoide libero su un insieme. Gruppo libero su un insieme. Sottogruppo normale generato da un sottoinsieme. Gruppi presentati per generatori e ralazioni; proprietà universale; esempi e applicazioni. Coprodotto di gruppi.

Riferimenti bibliografici:
Artin: capitolo 6, paragrafi 7,8.

4. Il problema della teoria delle rappresentazioni: decomposizione in somma diretta di oggetti "minimali"; esistenza, unicità, invarianti.
Moduli ciclici, irriducibili, indecomponibili. Algebre semisemplici, definizione; per le algebre semisemplici indecomponibili e irriducibili coincidono. Ogni A-

modulo di dimensione finita è somma diretta di indecomponibili.

Esempi: A) $K[x]$-moduli di dimensione finita e teorema di Jordan: sottomoduli (sottospazi invarianti) e teoria degli autospazi (e autospazi generalizzati) e degli autovalori; indecomponibili e blocchi di Jordan; irriducibili e autovettori. B) Rappresentazioni dei gruppi ciclici finiti e rappresentazioni di dimensione finita del gruppo ciclico infinito. C) Rappresentazioni dei gruppi diedrali.

Il lemma di Schur e sue conseguenze: morfismi tra moduli completamente riducibili e matrici a blocchi a coefficienti in un corpo; unicità della decomposizione in somma diretta di irriducibili (classificazione dei moduli completamente riducibili); componenti isotipiche.

Moduli completamente riducibili: definizioni equivalenti; sottomoduli, quozienti, somme, somme dirette; componenti isotipiche; molteplicità degli irriducibili e classificazione dei moduli completamente riducibili; classificazione dei moduli ciclici completamente riducibili.

Teorema di Wedderburn per A-moduli di dimensione finita su campi algebricamente chiusi.

Classificazione delle algebre semisemplici; centro di un corpo e prodotto di campi, centro dell'algebra e numero degli irriducibili. Algebre semplici semisemplici. Prodotto diretto e prodotto tensoriale di algebre semisemplici e loro rappresentazioni irriducibili.

Il teorema del doppio centralizzatore.

Riferimenti bibliografici:
Etingof: paragrafi, 2.2-2.4;
Gaiffi: capitolo 1.

5. Rappresentazioni dei gruppi e dei gruppi finiti.

Il teorema di Maschke per le rappresentazioni dei gruppi finiti. L'algebra gruppo di un gruppo finito su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero: condizioni per la semisemplicità e struttura dell'algebra; numero e dimensione delle rappresentazioni irriducibili e loro molteplicità nella rappresentazione regolare. Il teorema di Dedekind-Frobenius.

Rappresentazioni del prodotto di due gruppi finiti; endomorfismi simultaneamente diagonalizzabili e classificazione delle rappresentazioni dei gruppi abeliani finiti.

La categoria $G\text{-mod}_K = KG\text{-mod}$. Rappresentazione banale: componente isotipica, invarianti, covarianti; media su G per gruppi finiti; il prodotto simmetrico e il prodotto alternante. Rappresentazione indotta dall'azione su un insieme: rappresentazione regolare; rappresentazione naturale e rappresentazione standard di $\mathcal{S}_n$. Struttura di rappresentazione sul prodotto tensoriale, simmetrico, alternante, sul duale, sulle funzioni, sugli omomorfismi; rappresentazioni invertibili. Restrizione, induzione e coinduzione.

L'anello di Grothendieck di un gruppo finito.

Teoria dei caratteri; funzioni di classe; ortogonalità dei caratteri. I caratteri delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito; il carattere della somma diretta, del prodotto tensoriale, di S^2V e Λ^2V, del duale, della rappresentazione indotta; reciprocità di Frobenius. La tavola dei caratteri; esempi: gruppi ciclici e/o abeliani finiti; gruppo diedrale; $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ con n piccolo, tavola dei caratteri di rappresentazioni indotte da rappresentazioni di sottogruppi. Integralità: sottogruppi dei gruppi abeliani finitamente generati, elementi interi su un anello, interi algebrici; cardinalità di un gruppo finito e dimensione delle sue rappresentazioni irriducibili.

Il teorema di Burnside sulla risolubilità dei gruppi di cardinalità $p^a q^b$.

Riferimenti bibliografici:
Etingof: paragrafi, 4.1-4.6, 4.8-4.10, 5.3-5.6;
Gaiffi: capitoli 1-2;
Serre: parte I capitoli 1-3, 5; parte II, capitolo 6; appendice.

6. Rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico.

Combinatorica: partizioni e ordinamento di dominanza, diagrammi di Young, tableaux di Young e loro trasposta.

Il gruppo delle permutazioni che preservano le righe e di quelle che preservano le colonne di un tableau di Young. Tableaux a meno di equivalenza per righe e rappresentazioni indotte dalla banale. Simmetrizzatori e antisimmetrizzatori: antisimmetrizzatore di Young e costruzione degli irriducibili (moduli di Specht). I moduli di Specht sono tutti e soli gli irriducibili, a due a due non isomorfi.

Ordinamento lessicografico sui tableaux e ordinamento parziale sui tableaux a meno di equivalenza per righe; tableaux semistandard (per righe e per colonne), tableaux standard e basi degli irriducibili.

Caratteri a valori interi; rappresentazioni indotte dalla banale: un'altra base dell'anello di Grothendieck.

Riferimenti bibliografici:
Fulton: parte II, capitolo 7, paragrafi 1-2;
Gaiffi: capitolo 3;
Macdonald: capitolo 1 paragrafo 1-4, 6-8;
Procesi: capitolo 9, sezione 2.

7. Dualità di Schur-Weyl e rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$.

Polarizzazione e generatori di S^nV e di $S^n(End_K(V))$.

Doppio centralizzatore e dualità di Schur-Weyl: i moduli di Schur, definizione e funtorialità; antisimmetrizzatore di Young e realizzazione dei moduli di Schur come sottomoduli del prodotto tensoriale; partizioni che parametrizzano i moduli di Schur; la rappresentazione determinante e la sua inversa.

Rappresentazioni polinomiali di $GL(V)$: definizione; sottorappresentazioni, quozienti, somme dirette e prodotti tensoriali di rappresentazioni polinomiali; rappresentazioni polinomiali e potenze tensoriali di V; rappresentazioni polinomiali e moduli di Schur; completa riducibilità.

L'azione di $\mathcal{S}_n$ sull'anello dei polinomi in n variabili: l'anello dei polinomi simmetrici in n variabili. Caratteri delle rappresentazioni polinomiali di $GL_n(K)$ e polinomi simmetrici. Orbite dei monomi, partizioni di n e basi su $\mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q}$; polinomi simmetrici elementari e polinomi di Newton; polinomi antisimmetrici, discriminante e polinomi di Schur; relazione tra polinomi di Newton, polinomi di Schur e centralizzatore degli elementi di $\mathcal{S}_n$.

Il carattere dell'$(\mathcal{S}_n \times GL(V))$-modulo $V^{\otimes n}$. Il carattere delle rappresentazioni di $\mathcal{S}_n$ indotte dalla banale di sottogruppi. Equivalenza tra il teorema di Schur sul carattere dei moduli di Schur e la formula di Frobenius per il carattere degli irriducibili di $\mathcal{S}_n$. Formule di Cauchy. Formula di Frobenius per il carattere degli irriducibili di $\mathcal{S}_n$ (solo cenni della dimostrazione).

Riferimenti bibliografici:
Fulton: parte I, capitolo 6, paragrafo 1;
Gaiffi: capitolo 4, paragrafi 1-7; capitolo 6;
Macdonald: capitolo 1 paragrafo 2, pagine 17-18,19-21, 23-24; capitolo 1 paragrafo 3, pagine 40-42; capitolo 1 paragrafo 4, pagine 62-63;
Procesi: capitolo 7, sezione 1 paragrafo 4; capitolo 9, sezione 1 pagine 243-244; capitolo 9, sezione 3; capitolo 9, sezione 4, paragrafo 1.

***

Riferimenti bibliografici completi:

M. Artin, Algebra, Bollati Boringhieri;
C.W. Curtis and I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Wiley-Interscience Publication;
P. Etingof, Lectures and problems in representation theory - note;
W. Fulton, Young tableaux, Cambridge University Press;
G. Gaiffi, Appunti rivisitati di Teoria delle rappresentazioni (a cura di Sacco E.) - note;
Lang S., Algebra - 3rd Edition - Graduate Texts in Mathematics, Springer;
C. Procesi, Lie Groups - An Approach through Invariants and Representations, Springer;
Serre J.P., Linear representations of finite groups - Graduate Texts in Mathematics, Springer.