Effetto Allee

L'effetto Allee è descritto dall'equazione

$$x'(t) = kx\left(1 - \frac{x}{C}\right)\left(\frac{x}{A} - 1\right) \tag{1}$$

L'equazione descrive matematicamente l'evoluzione della densità di popolazione di una specie sessuata che interagisce con l'ambiente circostante. La costante k è il tasso di riproduzione, che descrive la velocità di crescita della popolazione in assenza di limitazioni. La costante C è la capacità di carico, ovvero la densità massima di popolazione che l'ambiente può nutrire. Infine, a bassa densità una popolazione sessuata può estinguersi per la rarità degli incontri fertili; A rappresenta la densità minima di popolazione perché gli incontri fertili siano sufficienti a mantenere un tasso di crescita effettivo positivo. Supponiamo quindi che $0 < A < C$, per avere soluzioni stabili non banali, cioè perché l'ambiente sia in grado di sostenere una popolazione superiore alla densità minima.
Risolveremo esplicitamente l'equazione per i valori dei parametri

$$k = 1, A = 1, C = 2.$$

Consideriamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)(x-1)\,, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Le soluzioni costanti sono $x = 0$, $x = 1$ ed $x = 2$. Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{2}{\xi(2-\xi)(\xi-1)} d\xi = \int_0^t d\tau$$

Poiché l'integrando si riscrive come

$$\frac{2}{\xi(2-\xi)(\xi-1)} = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi-2} + \frac{2}{\xi-1},$$

si ottiene

$$\left[\log\left|\frac{(\xi-1)^2}{\xi(\xi-2)}\right|\right]_{x_0}^{x(t)} = t,$$

ovvero

$$\log\left|\frac{(x(t)-1)^2}{x(t)(x(t)-2)}\frac{x_0(x_0-2)}{(x_0-1)^2}\right| = t.$$

Poiché le curve soluzione non possono oltrepassare le rette corrispondenti alle soluzioni costanti, il segno di $\frac{(x(t)-1)^2}{x(t)(x(t)-2)}$ è costante nel tempo, e quindi

$$\frac{(x(t)-1)^2}{x(t)(x(t)-2)}\frac{x_0(x_0-2)}{(x_0-1)^2} > 0$$

per $x_0 \notin \{0, 1, 2\}$, ovvero possiamo togliere il modulo. Passando agli esponenziali ci riconduciamo all'equazione

$$\big(x_0^2 - 2x_0 - (x_0-1)^2e^t\big)x^2 - 2\big(x_0^2 - 2x_0 - (x_0-1)^2e^t\big)x + x_0(x_0-2) = 0. \tag{2}$$

Osserviamo che il coefficiente di x^2 è strettamente negativo per ogni $t \geq 0$, infatti

$$x_0^2 - 2x_0 - (x_0-1)^2e^t = e^t\big[-(1-e^{-t})x_0^2 + 2(1-e^{-t})x_0 - 1\big] \tag{3}$$

ed il secondo membro è un polinomio di secondo grado in x_0 sempre negativo.

Perciò possiamo dividere l'equazione (2) per il coefficiente di x^2 ottenendo

$$x^2 - 2x + \frac{x_0(x_0-2)}{x_0^2 - 2x_0 - (x_0-1)^2 e^t} = 0. \tag{4}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene, dopo qualche passaggio,

$$x(t) = 1 \pm \frac{|x_0 - 1|}{\sqrt{(x_0-1)^2 - x_0(x_0-2)e^{-t}}}; \tag{5}$$

la verifica della condizione iniziale implica

$$x(t) = 1 + \frac{x_0 - 1}{\sqrt{(x_0-1)^2 - x_0(x_0-2)e^{-t}}}. \tag{6}$$

Si osservi che il termine sotto radice è sempre positivo, essendo l'opposto del termine in (3).
Studiamo infine il comportamento asintotico per $t \to +\infty$: si ottiene

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1 + \frac{x_0-1}{|x_0-1|} = \begin{cases} 2 & x_0 > 1 \\ 0 & 0 < x_0 < 1 \end{cases}$$

Studiamo poi la derivata prima di $x(t)$:

$$x'(t) = -\frac{x_0(x_0-1)(x_0-2)}{\big((x_0-1)^2 - x_0(x_0-2)e^{-t}\big)^{3/2}},$$

Conclusioni: se $0 < x_0 < 1$, cioè se la densità di popolazione è sotto la soglia minima, la popolazione stessa tende a d estinguersi. Se $x > 1$ la popolazione tende a stabilizzarsi sul valore di soglia 2. I valori 0,1,2 corrispondono a soluzioni costanti.