CURRICULUM VITAE ET STUDIORUM

LUCIO DAMASCELLI

DATI PERSONALI

Nato a Roma il 27-6-1963, residente in Via S.Erasmo 12, 00184 ROMA.
Sposato con due figli.
Attività extra-universitarie: musicista (chitarra acustica solo).

TITOLI DI STUDIO

- Laurea in Matematica con lode presso l' Università di Roma "La Sapienza" nel novembre 1991.
- Titolo di Dottore di Ricerca nel luglio 1997 ottenuto presentando una tesi dal titolo "Proprietà qualitative delle soluzioni positive di una classe di problemi ellittici non lineari".

POSIZIONI

Professore associato confermato, nel settore disciplinare Mat/05, Analisi Matematica, presso la facoltà di Ingegneria dell' Università di Tor Vergata, Roma dal 1-11-2001. Confermato in ruolo il 1-11-2004.

Precedentemente:
Ricercatore, nel settore disciplinare A02A, Analisi Matematica, presso l'Università di Tor Vergata, Roma dal 1-11-1996. Confermato in ruolo il 1-11-1999.

BORSE DI STUDIO

- 1991: Borsa di Studio Post Laurea presso l' INDAM " Francesco Severi"
- 1992: Borsa di studio presso la S.A.S.I.A.M. (School for Advanced Studies in Industrial and Applied Mathematics, Tecnopolis , Bari)
- 1992-1996: Borsa di studio del concorso di ammissione all' VIII ciclo del Dottorato di Ricerca presso l' Università di Roma "La Sapienza".
- 1998: Borsa di studio C.N.R. per attività di Ricerca in Istituti di Ricerca esteri, svolta nel periodo 1/1/1998 - 30/9/1998 presso i Laboratoires d'Analyse Numerique (Université Paris VI)

VISITE PRESSO ISTITUZIONI SCIENTIFICHE ESTERE

- 1/1/1998 - 30/9/1998: Due semestri presso l' Université Paris VI nell'ambito di una borsa di studio C.N.R.
- Maggio 1999: Soggiorno di due settimane presso l' Universidad Autonoma de Madrid, invitato per un ciclo di seminari.
- Gennaio 2000: Visiting Professor per un mese presso il T.I.F.R. Centre (Bangalore,India).
- Gennaio 2001: Soggiorno di due settimane presso l' Université de Nice Sophia-Antipolis (Nizza), invitato per un ciclo di seminari.
- Marzo 2004: Soggiorno di due settimane presso l' Université de Nice Sophia-Antipolis (Nizza), invitato per un ciclo di seminari.

ATTIVITA' DIDATTICA UNIVERSITARIA

Ha tenuto i seguenti corsi presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma II a partire dal 1996:

1996-1997: ESERCITAZIONI DI ANALISI MATEMATICA II (60 0re)

1997-1998: ESERCITAZIONI DI ANALISI MATEMATICA II (60 0re)

1998-1999: ESERCITAZIONI DI ANALISI MATEMATICA II (60 0re)

1999-2000: ESERCITAZIONI DI ANALISI MATEMATICA II (60 0re)

2000-2001: ANALISI MATEMATICA I /1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2001-2002: ANALISI MATEMATICA I/1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2001-2002: ANALISI MATEMATICA I/2 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2001-2002: ANALISI MATEMATICA III (Analisi Funzionale per Ing. Civile) (60 0re)

2002-2003: ANALISI MATEMATICA I/1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2002-2003: ANALISI MATEMATICA I/2 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2002-2003: ANALISI MATEMATICA III (Analisi Funzionale per Ing. Civile) (60 0re)

2003-2004: ANALISI MATEMATICA II/1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2003-2004: ANALISI MATEMATICA II/2 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2004-2005: ANALISI MATEMATICA II/1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2004-2005: ANALISI MATEMATICA II/2 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2005-2006: ANALISI MATEMATICA I/1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2005-2006: ANALISI MATEMATICA I/2 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2006-2007: ANALISI MATEMATICA II/1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2006-2007: ANALISI MATEMATICA II/2 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2007-2008: ANALISI MATEMATICA I/1 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2007-2008: ANALISI MATEMATICA I/2 (Ing. Gestionale) (60 0re)

2007-2008: ANALISI FUNZIONALE ED EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI 1 (Ing. dei Modelli e Sistemi) (60 0re)

2008-2009: ANALISI MATEMATICA II (Ing. Gestionale) (120 0re)

2008-2009: ANALISI FUNZIONALE ED EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI 1 (Ing. Matematica) (60 0re)

2009-2010: ANALISI MATEMATICA II (Ing. Gestionale) (120 0re)

2010-2011: ANALISI MATEMATICA I (Ingegneria, tutti i corsi di laurea) (120 0re)

2011-2012: ANALISI MATEMATICA II (Ingegneria Civile e Ambientale) (120 0re)

2012-2013: ANALISI MATEMATICA II (Ingegneria Civile e Ambientale) (120 0re)

2013-2014: ANALISI MATEMATICA II (Ingegneria Civile e Ambientale, Elettronica, Tecnologie di Internet) (120 0re)

2014-2015: ANALISI MATEMATICA II (Ingegneria Civile e Ambientale, Elettronica, Tecnologie di Internet) (120 0re)

2015-2016: ANALISI MATEMATICA 3 (Matematica) (60 0re)

2015-2016: MATEMATICA (Scienze Biologiche) (80 0re)

2016-2017: ANALISI MATEMATICA 3 (Matematica) (60 0re)

2016-2017: MATEMATICA (Scienze Biologiche) (80 0re)

2017-2018: ANALISI MATEMATICA 3 (Matematica) (60 0re)

2017-2018: MATEMATICA (Scienze Biologiche) (80 0re)

TESI DI DOTTORATO IN MATEMATICA

Relatore della tesi di dottorato in Matematica del dott. Berardino Sciunzi, dal titolo ''Regularity and qualitative properties of positive solutions of m-Laplace equations" discussa il 14-01-2005 con giudizio ''eccellente".

CONFERENZE SU INVITO

- Aprile 1998: École Normale Superieure-Paris
- Febbraio 1999: Università di Bologna
- Maggio 1999: Universidad Autonoma de Madrid
- Gennaio 2000: T.I.F.R. Centre (Bangalore,India) (2 conferenze).
- Dicembre 2000: Università di Perugia
- Dicembre 2000: Università di Trieste
- Gennaio 2001: Université de Nice Sophia-Antipolis (Nizza)
- Febbraio 2001: Università di Roma "La Sapienza"
- Marzo 2004: Université de Nice Sophia-Antipolis (Nizza)
- Marzo 2004: Università di Roma "La Sapienza"

- Gennaio 2006: Wolfgang Pauli Institute -VIENNA
- Marzo 2007: Università di Milano
- Maggio 2008: Université Catholique de Louvain
- Novembre 2011: Università di Roma ”La Sapienza”
- Febbraio 2015: Università di Roma ”La Sapienza”

COMUNICAZIONI A CONGRESSI

- Congresso del gruppo nazionale di ricerca (40 per cento) “ Problemi non lineari ..... ” (coordinatore A. Fasano) - Montecatini- Luglio 1996-
- Congresso “ Nonlinear Boundary Value Problems” - Torino - Settembre 1997-
- Congresso “ Nonlinear Boundary Value Problems” - Torino - Settembre 1998-
- Congresso del progetto MURST “ Metodi Variazionali ed Equazioni Differenziali Non Lineari ” - Trieste - Giugno 1999
- Congresso U.M.I. - Napoli Settembre 1999 -
- Workshop “A Week End in Nonlinear Analysis” - Roma - Marzo 2001
- Workshop “Singularity in nonlinear elliptic problems” - Roma - Maggio 2001
- Congresso ” Giornate Nonlineari ” - Roma - Gennaio 2003 -
- Fifth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems: A special tribute to the work of Haim Brezis - Gaeta - Giugno 2004
- International Symposium on Variational Methods and Nonlinear Differential Equations on the occasion of Antonio Ambrosetti's 60th birthday - Roma - Gennaio 2005
- International Workshop on ”Symmetry in nonlinear elliptic PDE's”- Wolfgang Pauli Institute -VIENNA Gennaio 2006
- Spring School in Nonlinear Partial Differential Equations, Louvain-la-Neuve Maggio 2008
- Congresso ”Theoretical and computational methods in nonlinear differential equations” - Bertinoro - Settembre 2009

INTERESSI DI RICERCA

A) Studio di equazioni ellittiche semilineari del tipo $-\Delta u = f(u)$ (si vedano i lavori [2], [3], [7], [10],[13], [14]).

B) Studio di problemi ellittici singolari e degeneri. (si vedano i lavori [4],[5],[6],[8],[9],[11],[13], [16],[17], [18], [19], [20])

C) Studio di problemi ellittici su varietà (si vedano i lavori [12], [15]).

D) Studio di sistemi ellittici semilineari (si vedano i lavori [21], [22], [23]).

DESCRIZIONE DELL' ATTIVITÀ DI RICERCA

A) Studio di equazioni ellittiche semilineari del tipo $-\Delta u = f(u)$

A1) *Unicità di soluzioni per problemi ellittici semilineari del tipo*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & in \quad \Omega \\ u > 0 & in \quad \Omega \\ u = 0 & su \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

dove $f \in C^1(\mathbb{R})$ e proprietà qualitative delle soluzioni del problema linearizzato associato

$$\begin{cases} L\varphi = 0 & in \quad \Omega \\ \varphi = 0 & su \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

dove $L = -\Delta - f'(u)$.

Nel lavoro **[2]** si considera il problema dell'unicità delle soluzioni di (1) quando $f(u) = u^p + \lambda u$, $p > 1$, con $p \leq \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda \neq 0$ tale problema è stato risolto solo nel caso in cui Ω è una palla. In questo caso è noto che le soluzioni sono radiali e quindi è sufficiente studiare l'equazione differenziale ordinaria associata al problema. Usando questo approccio diversi autori hanno dimostrato, per diversi valori di p e di λ, che esiste un'unica soluzione di (1) nella palla.

In **[2]** si dimostra un risultato di unicità parziale nel caso $\lambda \geq 0$ in domini regolari stellati rispetto all'origine mostrando che due soluzioni di (1) che abbiano gli insiemi di livello "dello stesso tipo", in un senso reso preciso, necessariamente coincidono. Se poi Ω è una palla in $\mathbb{R}^N$ l' ipotesi sugli insiemi di livello è verificata, e si ottiene una dimostrazione dell' unicità della soluzione di (1) che non utilizza tecniche di equazioni differenziali ordinarie, ma piuttosto principi di massimo, ed è quindi potenzialmente suscettibile di generalizzazioni a domini diversi.

Nel lavoro **[7]** si considera il caso in cui Ω è un dominio simmetrico rispetto agli iperpiani $\{x_i = 0\}$ e convesso nelle direzioni x_i, $i = 1, \ldots, N$, e si dimostra come i principi di massimo permettano di ottenere semplicemente molti risultati interessanti. Ad esempio si dimostra che ogni soluzione del problema (2), cioè ogni autofunzione di L corrispondente all'autovalore nullo, è simmetrica rispetto agli iperpiani $\{x_i = 0\}$, $i = 1, \ldots, N$, estendendo in questo modo un analogo risultato noto per gli autovalori negativi di L.

Se la dimensione dello spazio è $N = 2$ si dimostrano poi alcune proprietà dei sottoinsiemi di Ω dove una soluzione v di (2) è positiva (negativa, nulla), e analoghe proprietà per la differenza $w = u_1 - u_2$ di due soluzioni u_1, u_2 di (1) nel caso in cui f sia convessa.

In particolare se f è convessa e $N = 2$ si dimostra che non possono esistere due soluzioni distinte di (1) che abbiano lo stesso massimo. Questo risultato può essere considerato una generalizzazione del teorema di unicità per le equazioni differenziali ordinarie; inoltre la dimostrazione è valida anche nel caso in cui Ω è una palla in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, fornendo cosí un'alternativa naturale allo studio dell'equazione differenziale ordinaria associata a (1).

Se Ω è un dominio simmetrico in $\mathbb{R}^2$ oppure una palla in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, viene dimostrata poi, utilizzando tecniche analoghe, l'unicità delle soluzioni del problema (1) nel caso in cui $f(u) = u^p$, $p > 1$, e l' esistenza di esattamente due soluzioni nel caso in cui $f(u) = u^p + \mu u^q$, $p > 1$, $0 < q < 1$, $\mu > 0$ per valori di μ sufficientemente piccoli (in questo caso è noto che esiste un $\Lambda > 0$ tale che per ogni $\mu \in (0, \Lambda)$ esistono almeno due soluzioni di (1)).

A2) *Studio della linea nodale delle autofunzioni del laplaciano.*

Nel lavoro **[10]** viene presentata una semplice dimostrazione di una nota congettura, che afferma che l'insieme nodale della seconda autofunzione del laplaciano in domini regolari limitati di $\mathbb{R}^N$ deve intersecare la frontiera del dominio. Tale congettura viene dimostrata nel caso di un dominio Ω di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, che sia convesso e simmetrico in una direzione. Con tale ipotesi il risultato era stato dimostrato da Payne in dimensione $N = 2$, con una tecnica più complicata, e, sempre in dimensione 2, nel caso di un dominio convesso da altri autori. La tecnica usata nel lavoro consente non solo di evitare la limitazione sulla dimensione (e sulla regolarità del dominio) ma anche di estendere il risultato ad autofunzioni di ordine più elevato nel caso in cui il dominio presenti più simmetrie. Inoltre per alcuni domini viene fornita una limitazione superiore alla molteplicitá del secondo autovalore.

A3) *Monotonia, simmetria e non esistenza delle soluzioni positive di problemi ellittici semilineari.*

Nel lavoro **[3]** si estendono a operatori quasilineari strettamente ellittici in forma di divergenza alcuni risultati di simmetria e monotonia delle soluzioni in dipendenza dalla geometria del dominio considerato, note nel caso dell'operatore di Laplace o nel caso di operatori nonlineari in forma non di divergenza. La tecnica usata si basa da un lato sul noto metodo di spostamento di iperpiani, dall' altro su una dimostrazione di alcuni principi di confronto per operatori quasilineari non degeneri in forma di divergenza.

Nel lavoro **[14]** vengono dimostrati alcuni teoremi di tipo "Liouville" per le soluzioni positive di equazioni ellittiche semilineari nello spazio intero o in semispazi, cioè teoremi di non esistenza di soluzioni positive sotto ipotesi di crescita della non linearità e/o della soluzione. In particolare otteniamo teoremi di tipo Liouville non noti precedentemente per soluzioni di problemi ellittici semilineari in semispazi con condizioni di tipo misto (Dirichlet-Neumann) sulla frontiera, senza alcuna condizione sul comportamento delle soluzioni all' infinito. Come caso particolare di questo risultato si ottiene la non esistenza di soluzioni non identicamente nulle del problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^p & \text{in} & \mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\} \\ u &> 0 & \text{in} & \mathbb{R}^N_+ \\ u &= 0 & \text{su} & \Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\,,\, x_1 > 0\} \\ \frac{\partial u}{\partial x_N} &= 0 & \text{su} & \Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\,,\, x_1 < 0\} \end{cases}$$

se $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$.

La tecnica usata si basa da un lato sull' uso della trasformata di Kelvin e dall' altro sul metodo di spostamento di iperpiani insieme a un opportuno uso di classiche disuguaglianze integrali, come nei lavori [11] e [12] (si vedano le successive descrizioni).

Nello sviluppare questa tecnica otteniamo anche una dimostrazione unificata, con ipotesi più deboli, di diversi risultati noti di tipo Liouville per soluzioni di problemi ellittici in tutto lo spazio e in semispazi con condizioni al bordo di tipo Dirichlet. Ad esempio si dimostra che non esistono soluzioni non costanti del problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{in} & \mathbb{R}^N \\ u &\geq 0 & \text{in} & \mathbb{R}^N \end{cases}$$

senza alcuna condizione sul comportamento della soluzione all' infinito, se è verificata la seguente ipotesi (nonlinearità sottocritica o critica):

$$\frac{f(t)}{t^{\frac{N+2}{N-2}}} \quad \text{è non crescente} \ , \ f(t) \neq k\, t^{\frac{N+2}{N-2}}$$

Precedentemente un risultato di questo tipo era stato dimostrato dapprima nel caso di $f(u) = u^p$, $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$ da Gidas-Spruck e Caffarelli-Gidas-Spruck, e poi generalizzato da Chen e Lin al caso in cui oltre all' ipotesi da noi considerata si suppone che f sia positiva, lipschitziana e crescente.

B) Studio di problemi ellittici singolari e degeneri.

B1) *Principi di confronto per soluzioni di disuguaglianze differenziali in presenza di operatori ellittici singolari e degeneri.*

Nello studio di problemi differenziali associati a equazioni ellittiche singolari e degeneri, il cui modello è dato dall'equazione

$$-\Delta_p u = f(u) \qquad \text{in } \Omega\ , \tag{3}$$

dove $\Delta_p u = div\,(|Du|^{p-2}Du)$ è l'operatore p-laplaciano, una difficoltà sostanziale è data dalla mancanza di teoremi di confronto generali, paragonabili a quelli noti invece nel caso di operatori strettamente ellittici.

Nel lavoro **[4]** viene studiato il problema generale del confronto tra sottosoluzioni e soprasoluzioni di equazioni del tipo (3) (o di problemi piú generali con analoga struttura).

In particolare se u, v sono rispettivamente una sottosoluzione e una soprasoluzione di (3), con $p > 1$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è localmente Lipschitziana si dimostrano:

i) *Principi di confronto forte.* Ad esempio se $u \leq v$ in Ω e $Z = Z(u,v) = \{x \in \Omega : Du(x) = Dv(x) = 0\}$, in ogni componente connessa di $\Omega \setminus Z$ si ha l'alternativa $u < v$ oppure $u \equiv v$. Precedentemente un risultato di questo tipo era stato dimostrato supponendo che $u \in C^2$ con $|Du| \geq \varepsilon > 0$.

ii) *Principi di confronto debole.* Ad esempio se $1 < p < 2$, Ω è limitato, $\Omega' \subset \Omega$ e $u \leq v$ su $\partial\Omega'$ si ottiene la disuguaglianza $u \leq v$ in tutto il dominio Ω' se Ω' ha misura piccola o se i gradienti di u e v sono ivi piccoli (o se Ω' è unione di due domini con una di queste proprietà). Nel caso nondegenere di $p = 2$ era noto un corrispondente principio in insiemi di misura piccola per operatori non in forma di divergenza, mentre non è vero un analogo principio di confronto in insiemi dove i gradienti sono piccoli.

Analoghi principi di confronto debole per operatori di questo tipo in domini illimitati sono contenuti nei lavori [8], [11], di cui si parlerà nella parte B3).

Nel lavoro **[13]** si dimostra un Principio di massimo forte per soluzioni non negative di problemi quasilineari del tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{in } \Omega \quad , \quad 1 < p \leq 2 \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $f(0) < 0$ (problemi "di tipo non positone") in domini Ω di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, convessi e simmetrici in qualche direzione. In questo caso il seguente fenomeno singolare era stato osservato nel caso strettamente ellittico in cui $p = 2$: mentre in dimensione $N = 1$ esistono soluzioni del problema di Dirichlet in un intervallo limitato I che si annullano all' interno dell'intervallo I, se Ω è una palla in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, le soluzioni sono strettamente positive in Ω. Noi estendiamo tale risultato a domini strettamente convessi che abbiano una simmetria in una direzione, e al caso singolare del p- laplaciano con $p < 2$. È interessante notare come per questo tipo di principi di massimo forte sia utile, e cruciale per la nostra dimostrazione, il metodo di spostamento di piani solitamente utilizzato per problemi di simmetria. Tale metodo fornisce, per ogni dominio regolare strettamente convesso Ω in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un sottoinsieme di positività della soluzione, che nel caso di domini simmetrici coincide con l'intero dominio.

B2) *Proprietà di simmetria e monotonia per soluzioni di problemi di Dirichlet quasilineari ellittici singolari o degeneri in domini limitati.*

La tecnica variazionale usata nel lavoro [3] per operatori non lineari, ma strettamente ellittici, è un punto di partenza per la considerazione del problema della simmetria e monotonia delle soluzioni nel caso di operatori degeneri il cui modello è il cosiddetto p-laplaciano $\Delta_p u = div\,(|Du|^{p-2}Du)$, $1 < p < \infty$. In questo caso però una difficoltà sostanziale è data dalla mancanza di teoremi di confronto generali per operatori ellittici degeneri di questo tipo, teoremi di confronto che sono alla base del metodo di spostamento di piani ("moving plane method") che viene usato per dimostrare teoremi di simmetria in casi nondegeneri.

I teoremi di confronto dimostrati nel lavoro **[4]** permettono di ottenere nello stesso lavoro anche dei risultati di simmetria parziale delle soluzioni deboli di classe C^1 del problema

$$(4) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) & \text{in} & \Omega \\ u &> 0 & \text{in} & \Omega \\ u &= 0 & \text{on} & \partial\Omega \end{cases}$$

nel caso in cui $1 < p < 2$, f è localmente lipschitziana in $[0, +\infty)$, e Ω è un dominio limitato in $\mathbb{R}^N$ avente delle proprietà di simmetria in qualche direzione. I risultati sono di simmetria parziale nel senso che si fanno ipotesi topologiche sull'insieme critico della soluzione, insieme dei punti dove il gradiente della soluzione si annulla (ipotesi comunque molto piú deboli di ipotesi considerate precedentemente in letteratura); si dimostra in ogni caso che se non c'è simmetria delle soluzioni in domini che hanno una simmetria in qualche direzione, le soluzioni hanno una "simmetria locale", in un senso reso preciso.

Nel lavoro **[6]** (e nella corrispondente nota breve [5]) un'analisi piú fine della possibile mancanza di simmetria delle soluzioni ha permesso di ottenere un risultato "pieno" di simmetria delle soluzioni di (4): senza fare ipotesi alcuna sull'insieme dei punti critici si ottiene la simmetria delle soluzioni di (4) in domini regolari convessi e simmetrici in una direzione. In particolare se Ω è una palla si ottiene che le soluzioni di (4) sono radiali e strettamente radialmente decrescenti.

La tecnica è piuttosto elaborata e si basa sui precedenti risultati di simmetria locale ([4]), su un uso particolare del lemma di Hopf e su una tecnica di spostamento simultaneo di iperpiani differenti, ortogonali a direzioni appartenenti a un intorno di direzioni di una direzione fissata.

Tra le ipotesi figura la locale lipschitzianità di f in $[0, \infty)$, ipotesi che nel caso $p = 2$ permette di trattare tutti i casi "sopralineari", ma che non è naturale per i corrispondenti problemi nel caso di $p < 2$.

Nel lavoro **[9]** abbiamo quindi esteso il risultato di simmetria al caso in cui la nonlinearità f non è lipschitziana in 0 e verifica piuttosto ipotesi molto deboli di "positività" nell'origine. Abbiamo poi applicato i risultati ottenuti allo studio di un problema sovradeterminato in cui compare il p-laplaciano e allo studio delle migliori costanti nella disuguaglianza isoperimetrica e di alcune disuguaglianze di Sobolev ottenendo in particolare le migliori costanti utilizzando solo tecniche di equazioni a derivate parziali e principi di confronto per operatori ellittici quasilineari.

B3) *Proprietà di simmetria e monotonia per soluzioni di problemi di Dirichlet quasilineari ellittici singolari o degeneri in domini illimitati.*

Il problema della simmetria delle soluzioni di equazioni ellittiche in cui compaiono operatori del tipo p-laplaciano in domini illimitati è piú complicato, anche nel caso nondegenere di $p = 2$, per la mancanza di un principio debole di confronto generale per soluzioni di (dis)uguaglianze ellittiche in domini illimitati.
Nel lavoro **[8]** otteniamo la simmetria radiale delle soluzioni ("ground states") del problema

$$(5) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u(x) &= f(u(x)) \quad \text{in } \mathbb{R}^N ,\ u > 0, \\ u(x) &\to 0 \quad \text{per } |x| \to \infty. \end{cases}$$

per $1 < p < 2$, f localmente lipschitziana in $(0, \infty)$ e decrescente in un intorno destro di 0 (ipotesi questa standard in alcuni teoremi di simmetria nel caso $p = 2$) e $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap$

$W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Per ottenere tale risultato si dimostrano dapprima alcuni principi di confronto debole in insiemi illimitati.
In generale non sempre è nota a priori la sommabilità delle soluzioni di un problema tipo (5), specialmente quando si arriva a soluzioni del problema attraverso tecniche di "blow up" , e inoltre molte nonlinearità tipiche che compaiono quando si usano tali tecniche non verificano la condizione di decrescenza vicino a 0 (ad esempio le potenze $f(u) = u^p$).

Nel lavoro **[11]** ci siamo dunque posti il problema della simmetria delle soluzioni di (5) in questi casi piú generali. Da un lato siamo riusciti a estendere il risultato di simmetria in [8], nelle stesse ipotesi sulla f, alle soluzioni deboli che siano solo di classe C^1.

Inoltre abbiamo considerato il caso in cui la f non sia decrescente in un intorno di zero, ma si conosca l'ordine del decadimento all'infinito di una soluzione. Questo caso è stato studiato finora solo nel caso nondegenere, e nel caso $p = 2$ è stato dimostrato che le soluzioni u di (5) sono radiali nell' ipotesi in cui esistono $\alpha > 0$, $m > 0$, tali che

$$f'(u) = O(u^\alpha)\ (u \to 0), \quad u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)\ (|x| \to \infty), \quad m\,\alpha > 2 \tag{6}$$

Noi abbiamo dimostrato la simmetria radiale delle soluzioni con ipotesi "naturali" nel caso $p \leq 2$, precisamente supponendo che $f'(u) = O(u^\alpha)$ $(u \to 0)$, $u = O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$, $Du(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{m+1}}\right)$ all' infinito, con $m(\alpha + 2 - p) > p$. Nel caso $p = 2$ queste ipotesi coincidono con le (6) e si ha una dimostrazione "variazionale" dei risultati noti per il laplaciano, generalizzabili immediatamente a operatori ellittici in forma di divergenza. Per entrambi i risultati in [11] la chiave è data da estensioni appropriate delle classiche disuguaglianze di Poincaré e di Hardy-Sobolev.

B4) *Regolarità e proprietà qualitative per soluzioni di problemi di Dirichlet quasilineari ellittici singolari o degeneri in domini limitati.*

Nel lavoro [16] partiamo dal punto di vista che consiste nel considerare $|Du|^{m-2}$ come un peso, ciò è particolarmente utile nello studio delle proprietà qualitative di una fissata soluzione u. Otteniamo in questo modo risultati di regolarità e proprietà qualitative delle soluzioni deboli di classe $C^1(\overline{\Omega})$ positive del problema di Dirichlet relativo all' equazione $-\Delta_m(u) = f(u)$ in un dominio limitato regolare Ω di $\mathbb{R}^N$, dove $1 < m < \infty$ e f è positiva e localmente Lipschitziana.
In particolare dimostriamo proprietà di sommabilità dell' inverso $\frac{1}{|Du|}$ del modulo del gradiente di una soluzione u, e disuguaglianze di tipo Sobolev e Poincaré in spazi di Sobolev con peso $|Du|^{m-2}$. e utilizzando questi risultati di regolarità possiamo dimostrare un principio di confronto debole per le soluzioni e, con l' aiuto del metodo di spostamento di piani di Alexandrov-Serrin, un risultato di monotonia (e simmetria) per le soluzioni in domini limitati (e simmetrici in una direzione) nel caso in cui $f(s) > 0$ per $s > 0$ e $m > 2$. Estendiamo quindi al caso generale $1 < m < +\infty$ risultati precedentemente dimostrati nel caso $1 < m < 2$.
Nel lavoro [18], utilizzando tutti i risultati ottenuti in [16], dimostriamo anche una disuguaglianza di tipo Harnack per le soluzioni dell' operatore linearizzato in una fissata soluzione, e una disuguaglianza di tipo Harnack di confronto per coppie di soluzioni e come conseguenza un principio di confronto forte per le soluzioni, e un principio di massimo forte per le soluzioni del linearizzato.

Utilizzando tutti questi risultati dimostriamo alcune proprietà dell' insieme critico di una soluzione. Come caso particolare otteniamo che in un dominio convesso e simmetrico in N direzioni ortogonali in $\mathbb{R}^N$ il gradiente si annulla solo nel centro di simmetria 0, i.e. $Z \equiv \{x \in \Omega \,|\, D(u)(x) = 0\} = \{0\}$. Ciò è cruciale nello studio dell' operatore m-Laplaciano, perché Z è esattamente l' insieme dove la stretta ellitticità viene a mancare. Come corollario la soluzione $u \in C^2(\Omega \setminus \{0\})$ nel caso di simmetria considerato.
Nel lavoro **[17]** estendiamo alcuni dei risultati di regolarità e delle proprietà qualitative delle soluzioni presenti nei lavori [16] e [18] al caso di sistemi di equazioni ellittiche degeneri in cui compare l' operatore m-laplaciano, del tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{m_1}(u) & = f(v) \quad u > 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad u = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega \\ -\Delta_{m_2}(v) & = g(u) \quad v > 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad v = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

dove $(u, v) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$, Ω è un dominio limitato regolare in $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, $\Delta_m(u) = \operatorname{div}(|Du|^{m-2}Du)$ è l' operatore m-Laplaciano, $1 < m_1, m_2 < \infty$ e le nonlinearità f, g sono positive ($f(s), g(s) > 0$ per $s > 0$) nondecrescenti e localmente Lipschitziane.

Per alcuni risultati l' estensione è naturale e non presenta eccessive difficoltà, per altri è necessario raffinare le tecniche; ad esempio per dimostrare che le soluzioni verificano $|Du|^{m-2}Du \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $|Dv|^{m-2}Dv \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è necessario studiare per una singola equazione problemi di regolarità per equazioni del tipo

$$\begin{cases} -\Delta_m(u) & = h(x) & \text{in}\, \Omega \\ \quad u & > 0 & \text{in}\, \Omega \\ \quad u & = 0 & \text{on}\, \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

B5) *Teoremi di tipo Liouville per soluzioni stabili, di indice di Morse finito o positive di problemi ellittici quasilineari.*

Nel lavoro [19] consideriamo soluzioni deboli u (che eventualmente cambiano segno) dell' equazione $-\Delta_m(u) = |u|^{p-1}u$ in domini illimitati Ω e nell' intero spazio $\mathbb{R}^N$ e dimostriamo dei teoremi di tipo Liouville per soluzioni stabili o stabili fuori di un compatto. Ricordiamo che u è soluzione debole se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{m-2}(\nabla u, \nabla\varphi)\, dx = \int_\Omega |u|^{p-1}u\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{9}$$

In altri casi consideriamo problemi di Dirichlet del tipo

$$\begin{cases} -\Delta_m(u) & = |u|^{p-1}u & \text{in}\, \Omega, \\ \quad u & = 0 & \text{su}\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Una soluzione $u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ di (9) è detta **stabile** se

$$\begin{cases} L_u(\varphi, \varphi) \geqslant 0, \\ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \end{cases}$$

La condizione di stabilità si traduce nel fatto che la seconda variazione del funzionale associato è non negativa, perciò ad esempio tutti i minimi del funzionale associato sono

soluzioni stabili dell' equazione.
La soluzione u **ha indice di Morse** uguale a $K \geqslant 1$ se K è la massima dimensione di un sottospazio $\mathcal{Z} \subset C^1_c(\Omega)$ tale che $L_u(\varphi,\varphi) < 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{Z}$, $\varphi \not\equiv 0$, mentre è **stabile fuori di un compatto** $\mathcal{K} \subset \Omega$ se $L_u(\varphi,\varphi) \geqslant 0$ per ogni $\varphi \in C^1_c(\Omega \setminus \mathcal{K})$.

Qui L è l' operatore linearizzato dell' equazione nella soluzione u:

$$L_u(v,\varphi) = \int_\Omega |\nabla u|^{m-2} (\nabla v, \nabla\varphi)\, dx +$$
$$+ \int_\Omega (m-2)|\nabla u|^{m-4} (\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla \varphi) - p|u|^{p-1} v\varphi\, dx.$$

Un primo risultato che dimostriamo è il seguente.
Sia $u \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ una soluzione stabile dell' equazione (9) con $m > 2$. Supponiamo che

$$\begin{cases} (m-1) < p < \infty, & \text{se} \quad N \leqslant \frac{m(m+3)}{m-1}, \\ (m-1) < p < p_c(N,m), & \text{ise} \quad N > \frac{m(m+3)}{m-1}, \end{cases}$$

con

$$p_c(N,m) = \frac{[(m-1)N-m]^2 + m^2(m-2) - m^2(m-1)N + 2m^2\sqrt{(m-1)(N-1)}}{(N-m)[(m-1)N - m(m+3)]}$$

Allora $u \equiv 0$.
Oserviamo che il nuovo esponente critico $p_c(N,m)$ è sempre più grande dell' esponente critico classico $\frac{N(m-1)+m}{N-m}$, e nel caso di $m = 2$ si riduce all' esponente trovato da Farina nel lavoro " On the classification of solutions of the Lane-Emden equation on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$" pubblicato su J. Math. Pures Appl., 87(5):537–561, 2007.

Nel caso di soluzioni stabili fuori da un compatto è necessario utilizzare un' identità di tipo Pohozaev, che ridimostriamo in modo semplice, utilizzando i risultati dei lavori [16], [17], [18]. Per questo tipo di soluzioni (che comprende le soluzioni con indice di Morse finito) dimostriamo il seguente risultato.
Sia $u \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ una soluzione di (9) stabile fuori di un compatto $\mathcal{K}$. Sia $m > 2$ e

$$\begin{cases} (m-1) < p < \infty, & \text{se} \quad N \leqslant m, \\ (m-1) < p < \frac{N(m-1)+m}{N-m}, & \text{se} \quad N > m. \end{cases}$$

Allora $u \equiv 0$.
Il risultato è ottimale, perché se $p = \frac{N(m-1)+m}{N-m}$, esistono soluzioni della forma

$$u_\lambda(|x|) = u_\lambda(r) = \lambda \left(\frac{\lambda^{\frac{1}{m-1}} \left(N^{\frac{1}{m}} \left(\frac{N-m}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \right)}{\lambda^{\frac{m}{m-1}} + r^{\frac{m}{m-1}}} \right)^{\frac{N-m}{m}} \qquad \lambda > 0$$

che sono stabili fuori di una palla di raggio sufficientemente grande (come si dimostra utilizzando la disuguaglianza di Hardy).
Se $m < N$ e p è supercritico rispetto all' esponente classico ma sottocritico rispetto al nuovo esponente, , cioè se

$$\begin{cases} \frac{N(m-1)+m}{N-m} < p < \infty, & \text{if} \quad N \leqslant \frac{m(m+3)}{m-1}, \\ \frac{N(m-1)+m}{N-m} < p < p_c(N,m), & \text{if} \quad N > \frac{m(m+3)}{m-1}, \end{cases}$$

non riusciamo a dimostrare un teorma di tipo Liouville per soluzioni stabili fuori di un compatto (come invece dimostrato da Farina nel citato lavoro se $m = 2$), ma dimostriamo che ogni tale soluzione decade più velocemente all' infinito delle sole soluzioni radiali esistenti, e questo conduce a un teorema di tipo Liouville per soluzioni radiali in questo range di esponenti.
Dimostriamo cioè che in queste ipotesi $\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{m}{p-m+1}} u(x) = 0$, e quindi se u è radiale allora $u \equiv 0$.
Osserviamo che se $m = 2$ e $p \geq p_c(N, m)$, esistono soluzioni positive limitate radiali e stabili dell' equazione in $\mathbb{R}^N$.

Molti dei risultati dimostrati sono validi per le soluzioni dell' equazione $-\Delta_m(u) = |u|^{p-1}u$ in domini illimitati Ω diversi dall' intero spazio. In particolare vengono considerati i casi di grafici coercivi e di semispazi.
Nel caso $m = 2$ è noto che le soluzioni *positive* di problemi di Dirichlet in grafici coercivi o semispazi sono monotone e che le soluzioni monotone sono stabili. Nel caso semilineare $m = 2$ una conseguenza è la dimostrazione della nonesistenza di soluzioni positive in semispazi di problemi a crescita sottocritica, già nota con altre dimostrazioni.
Nel caso generale $m \neq 2$ è possibile dimostrare, grazie alle tecniche dei lavori [16]–[18] che le soluzioni di tali problemi in grafici coercivi sono monotone, ma nel caso di un semispazio non sono noti tali risultati, e anzi questo è uno dei più importanti problemi aperti.
Infatti la nonesistenza di soluzioni nel caso di semispazi, insieme alla corrispondente nonesistenza di soluzioni intere in $\mathbb{R}^N$ dimostrata in un celbre lavoro di Serrin-Zou, permetterebbe di utilizzare le tecniche di blow-up che si dimostrano essenziali in numerosi teoremi di esistenza e in molte altre questioni.

Nel lavoro [20] affrontiamo il problema nel caso particolare in cui la dimensione dello spazio è $N = 2$, ma per nonlinearità generali, e dimostriamo un teorema di monotonia per soluzioni (positive) del problema

$$(11) \qquad \begin{cases} -\Delta_m(u) & = f(u) \quad \text{in } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \\ u & \geq 0 \quad \text{in } D \\ u(x, 0) & = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le ipotesi che facciamo sulla nonlinearità f sono abbastanza generali e sostanzialmente si richiede a f di essere *localmente* lipschitziana in $[0, \infty)$, e positiva in $(0, \infty)$ se $m \neq 2$.
Osserviamo che non si richiede che f sia *globalmente* lipschitziana in $[0, \infty)$ o che u sia limitata, ipotesi che in una delle due forme compaiono nella letteratura nel caso $m = 2$.
In queste ipotesi dimostriamo che ogni soluzione di classe $C^1(\overline{D})$, $u \not\equiv 0$ è (positiva in D e) strettamente monotona nella direzione verticale, con $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) > 0$ in $\overline{D}$.

Una conseguenza di tale risultato, e dei teoremi dimostrati in [19], è un notevole teorema di Liouville, si dimostra cioè la nonesistenza di soluzioni non banali del problema(11) nel caso dell' equazione di Lane-Emden-Fowler, cioè quando ($N = 2$ e) $f(u) = u^p$, $1 < p < \infty$.

C) Studio di problemi ellittici su varietà.

Nel lavoro **[12]** abbiamo studiato il problema della simmetria delle soluzioni positive di equazioni ellittiche non lineari in varietà riemanniane non compatte. Per affrontare questo problema abbiamo dapprima riottenuto (e migliorato) i risultati di simmetria noti nel caso dello spazio $\mathbb{R}^N$ utilizzando una nuova tecnica basata sulle immersioni di Sobolev. In particolare nell' ipotesi (6), che garantisce la simmetria delle soluzioni di (5) (con $p = 2$), la soluzione u appartiene allo spazio $L^{\frac{N\alpha}{2}}(\mathbb{R}^N)$ perché $\frac{mN\alpha}{2} > N$ e $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Utilizzando solamente la disuguaglianza di Sobolev, abbiamo dimostrato che per per $p = 2$ le soluzioni (deboli) di (5) $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N\alpha}{2}}(\mathbb{R}^N)$ sono radiali, e sono radiali le soluzioni deboli dell' equazione, senza condizione all' infinito, che appartengano allo spazio $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ se la condizione $f'(u) \leq C\, u^\alpha$ è soddisfatta globalmente. Essendo la tecnica basata unicamente sulla disuguaglianza di Sobolev, essa è applicabile nel caso di varietà in cui agiscano gruppi di isometrie e siano disponibili disuguaglianze di tipo Sobolev. Ora in ipotesi abbastanza generali sulla varietà $\mathcal{M}$ vale per le funzioni nello spazio $H^1(\mathcal{M})$ la disuguaglianza

$$\left(\int_{\mathcal{M}} |v|^{\frac{2n}{n-2}} dvol\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq K^2 \int_{\mathcal{M}} |Dv|^2 dvol + B \int_{\mathcal{M}} v^2 dvol \ ,$$

dove $K = K(n, 2)$ è una costante universale dipendente solo dalla dimensione N e $B = B_{\mathcal{M}}$ è una costante dipendente dalla varietà, che nel caso dello spazio iperbolico è strettamente negativa (mentre $B = 0$ per $\mathbb{R}^N$). Utilizzando la disuguaglianza precedente dimostriamo una serie di risultati in cui assume un ruolo importante il rapporto $G = G_{\mathcal{M}} := \frac{|B_{\mathcal{M}}|}{K^2}$.
Nel caso di soluzioni del problema analogo a (5) per lo spazio iperbolico $\mathbb{H}^N$, con il laplaciano sostituito dall' operatore di Laplace-Beltrami $\Delta_{\mathbb{H}^N}$, si dimostra ad esempio che le soluzioni $u \in C^1(\mathbb{H}^N)$ sono radiali se esiste $s_0 > 0$ tale che f è non crescente in $(0, s_0)$; oppure se esistono $s_0, \alpha > 0$ tali che se $0 < a < b < s_0$ allora $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq G + C(a+b)^\alpha$ e $u \in L^2(\mathbb{H}^N) \cap L^{\alpha\frac{n}{2}}(\mathbb{H}^N)$; o ancora, senza l' ipotesi $u(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, se $u \in H^1(\mathbb{H}^N)$, $\exists\, \alpha > 0$ tale che se $0 < a < b$ allora $|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}| \leq G + C(a+b)^\alpha$ e $u \in L^{\alpha\frac{n}{2}}(\mathbb{H}^N)$.

Nel caso dello spazio iperbolico è interessante notare che, grazie alla forma che ha la disuguaglianza di Sobolev per $\mathbb{H}^N$, le ipotesi su f sono piú deboli di quelle che ci si aspetterebbe per analogia con il risultato per $\mathbb{R}^N$, in particolare f può avere un comportamento lineare nell'origine (purché u abbia un decadimento corrispondente all'infinito).
Nel lavoro **[15]** si estendono al caso di equazioni ellittiche degeneri o singolari su varietà alcune delle tecniche utilizzate nei lavori [16] e [18], in particolare si ottengono i risultati di regolarità delle soluzioni corrispondenti.

[1] [1] L.Damascelli, *Proprietà qualitative delle soluzioni positive di una classe di problemi ellittici non lineari*, **Tesi di Dottorato**, Università di Roma La Sapienza 1996

[2] L.Damascelli, *A remark on the uniqueness of the positive solution for a semilinear elliptic equation*, **Nonlinear Anal. T.M.A. 26 (1996), 211-216**

[3] L.Damascelli, *Some remarks on the method of moving planes*, **Differential Integral Equations 11 (3) (1998), 493-501**

[4] L.Damascelli, *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*, **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 15 (4) (1998), 493-516**

[5] [2] L.Damascelli, F.Pacella, *Monotonicity and Symmetry of solutions of p-Laplace equations, $1 < p < 2$, via the moving plane method*, **Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. s.9, vol.9 , fasc.2 (1998), 95-100**

[6] L.Damascelli, F.Pacella, *Monotonicity and Symmetry of solutions of p-Laplace equations, $1 < p < 2$, via the moving plane method*, **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol. XXVI (1998), 689-707**

[7] L.Damascelli,M.Grossi, F.Pacella, *Qualitative properties of positive solutions of semilinear elliptic equations in symmetric domains via the maximum principle*, **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16 (5) (1999), 631-652**

[8] L.Damascelli, F.Pacella, M.Ramaswamy, *Symmetry of ground states of p-Laplace equations via the moving plane method*, **Arch. Ration. Mech. Anal. 148 n.4 (1999), 291-308**

[9] L.Damascelli, F.Pacella, *Monotonicity and Symmetry results for p-Laplace equations and applications* , **Adv. Differential Equations 5 (7-9) (2000), 1179-1200**

[10] [3] L.Damascelli, *On the nodal set of the second eigenfunction of the laplacian in symmetric domains in $\mathbb{R}^N$* , **Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 11 (2000), no. 3, 175-181 (2001)**

[11] L.Damascelli, M.Ramaswamy, *Symmetry of C^1 solutions of p-Laplace equations in R^N* , **Adv. Nonlinear Stud. 1 (2001), no. 1, 40-64**

[12] L. Almeida, L. Damascelli, Y. Ge, *A few symmetry results for nonlinear elliptic PDE on noncompact manifolds*, **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 19 (2002), no. 3, 313-342**

[1] Nella tesi sono discussi in dettaglio alcuni risultati dei successivi lavori [2], [3], [4], [7] e inoltre sono dimostrati altri risultati non apparsi altrove.

[2] In questa nota sono enunciati i risultati dimostrati nel successivo lavoro [6].

[3] In questa nota sono presentati risultati originali, non apparsi altrove.

[13] L.Damascelli, F.Pacella, M.Ramaswamy, *A strong maximum principle for a class of non-positone singular elliptic problems*, **NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 10 (2003), no. 2, 187-196**

[14] L. Damascelli, F. Gladiali *Some nonexistence results for positive solutions of elliptic equations in unbounded domains*, **Rev. Mat. Iberoamericana 20 (2004), no. 1, 67-86**

[15] L. Almeida, L. Damascelli, Y. Ge *Regularity of positive solutions of p-Laplace equations on manifolds and its applications*, **Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica vol. 3 (2004)**, Proceedings of the Workshop on "Second order subelliptic equations and applications", Cortona, June 16-22, 2003

[16] L. Damascelli, B. Sciunzi *Regularity, Monotonicity and Symmetry of Positive Solutions of m-Laplace equations*, **J. Differential Equations 206 (2004), no. 2, 483-515**

[17] L. Damascelli, B. Sciunzi *Qualitative properties of solutions of m-Laplace systems.* **Adv. Nonlinear Stud. 5 (2005), no. 2, 197-221**

[18] L. Damascelli, B. Sciunzi *Harnack inequalities, Maximum and Comparison Principles, and Regularity of Positive solutions of m-Laplace equations*, **Calc. Var. Partial Differential Equations 25 (2006), no. 2, 139-159**

[19] L. Damascelli, A. Farina, B. Sciunzi, E. Valdinoci *Liouville results for m-Laplace equations of Lane-Emden-Fowler type*, **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 4, 1099-1119**

[20] L. Damascelli, B. Sciunzi, *Liouville results for m-Laplace equations in a half plane in* $\mathbb{R}^2$, **Differential Integral Equations 23 (2010), no. 5-6, 419-434**

[21] L. Damascelli, F. Pacella, *Symmetry results for cooperative elliptic systems via linearization* **SIAM J. Math. Anal. 45 (2013), no. 3, 1003-1026**

[22] L. Damascelli, F. Gladiali, F. Pacella, *A symmetry result for semilinear cooperative elliptic systems*, in Recent trends in nonlinear partial differential equations. II. Stationary problems, Amer. Math. Soc., Providence, RI, **Contemporary Mathematics 595 (2013), 187–204**

[23] L. Damascelli, F. Gladiali, F. Pacella, *Symmetry results for cooperative elliptic systems in unbounded domains* **Indiana Univ. Math. J. 63 No. 3 (2014), 615–649**

[24] L. Damascelli, S. Merchan, L. Montoro, B. Sciunzi, *Radial symmetry and applications for a problem involving the* $-\Delta_p(\cdot)$ *operator and critical nonlinearity in* $\mathbb{R}^N$, **Adv. Math. , 265 (2014), 313–335**

[25] L. Damascelli, F. Pacella, *Morse index and symmetry for elliptic problems with nonlinear mixed boundary conditions* , 2016, **Proc. Royal S. Edinburgh Sect. A, to appear**

[26] L. Damascelli, R. Pardo, *A priori estimates for some elliptic equations involving the p-laplacian*, 2017, https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.11.003, **Nonlinear Analysis RWA 41 (2018), 475–496**