

Exercício 1

$$(A) f(x) = \frac{2e^{(\arcsin x)^2} - 2 - x^2}{(1 - \cos(x^2))^{\alpha}} \quad x \rightarrow 0 = \frac{2(1 + (\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}(\arcsin x)^4 + o(x^4)) - 2 - x^2}{\frac{1}{2}x^{4\alpha}(1+o(1))}$$

per $x \rightarrow 0$ $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$= \frac{2[(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 + \frac{1}{2}x^4] - x^2}{\frac{1}{2}x^{4\alpha}(1+o(1))} = \frac{2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^4 - x^2 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^{4\alpha}(1+o(1))}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x^{4\alpha}}(1+o(1)) = \frac{1}{x^{4\alpha-2}}(1+o(1)) \quad x \rightarrow 0$$

quindi f é infinitesimale per $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 2 < 0$ ($\alpha < 1/2$) con ordine di infimo $2-4\alpha$

f è infinita per $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 2 > 0$ ($\alpha > 1/2$) con ordine $4\alpha-2$ (divuluto)

per $\alpha = 1/2$ f non è infinitesimale né infinita

$$(B) f(x) = (\lg(1+x^2) - (\arcsin x)^2)(1 + |\lg x|^{\alpha})$$

$x \rightarrow 0$ $\lg(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$(\arcsin x)^2 = (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))^2$

$|\lg x|^{\alpha} = x^{\alpha}(1+o(1))$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - x^2 + \frac{2}{3}x^4)(1 + x^{\alpha})(1+o(1))$$

$$= x^{\alpha}(1+x^{\alpha})(1+o(1)) \quad x \rightarrow 0$$

quindi se $\alpha \geq 0 \Rightarrow f$ è infinitesimale per $x \rightarrow 0$ con ordine α

se $\alpha < 0 \Rightarrow f(x) = O(x^{4+\alpha})$ per $\alpha > -4$ f è infinita
se $\alpha < -4$ f non è infinitesimale né infinita

se $4+\alpha < 0 \Rightarrow f$ è infinita con ordine $4+\alpha$
 $\alpha < -4$ $\alpha \alpha = 4$ non è infinitesimale né infinita

$$(C) f(x) = \frac{(2e^{(\arcsin x)^2} - 2 - x^2)^{\alpha}}{1 - \cos(x^2)} \quad \text{vedi (A)} = \frac{x^{2\alpha}(1+o(1))}{\frac{x^4}{2}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{4-2\alpha}}(1+o(1))$$

per $\alpha < 1/2$ $4-2\alpha > 0$ f è infinitesimale con ordine $4-2\alpha$

se $4-2\alpha < 0$ ($\alpha > 1/2$) f è infinitesimale con ordine $2\alpha-4$

se $\alpha = 1/2$ f non è infinitesimale né infinita

$$\textcircled{D} \quad f(x) = \frac{(f_2(1+x^2) - (x \cdot x)^2)^\alpha}{\lg x} \quad \text{verh. (B)} \quad \frac{x^{4\alpha}}{x} (\text{croci})$$

$$= \frac{1}{x^{1-4\alpha}} (\text{croci})$$

se $1-4\alpha > 0$ ($\alpha < 1/4$) f è infinita all'ordine di infinito $\boxed{1-4\alpha}$

se $1-4\alpha < 0$ ($\alpha > 1/4$) f è infinitesimale all'ordine $\boxed{4\alpha-1}$

se $\alpha = 1/4$ f non è infinitesimale né infinita

Esercizio n° 2

$$\textcircled{A} \quad \int_{-1}^2 \frac{\text{sgn}(t^3)}{(t^2+1)(t^2+4)} dt = \underline{1}$$

la funzione integranda $f(t) = \frac{\text{sgn}(t^3)}{(t^2+1)(t^2+4)} = \begin{cases} \frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)} & \text{se } t \geq 0 \\ \frac{-1}{(t^2+1)(t^2+4)} & \text{se } t < 0 \end{cases}$

essendo $t^3 \geq 0$ se $t \geq 0$ - Poiché l'intervallo di integrazione $[-1, 2]$ contiene lo zero al suo interno

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 \frac{-1}{(t^2+1)(t^2+4)} dt + \int_0^2 \frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)} dt$$

Calcoliamo pure una primitiva di $\frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)}$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)} dt = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+4} \right) dt = \frac{1}{3} \left(\arctg t - \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \right) + C$$

(ricordo dei limiti superiori)

Pertanto $I = -\frac{1}{3} \left[\arctg t - \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{3} \left[\arctg t - \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \right]_0^2$

$$= \frac{1}{3} \arctg(-1) - \frac{1}{6} \arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \arctg 2 - \frac{1}{6} \arctg(1)$$

$$= -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{6} \arctg(1/2) + \frac{1}{3} \arctg 2 - \frac{\pi}{24}$$

(arctg è una funzione dispari)

$$\textcircled{B} \quad I = \int_{-1/2}^2 \frac{\text{sgn}(t^3)}{t^2+3t+2} dt = \int_{-1/2}^0 \frac{-1}{t^2+3t+2} dt + \int_0^2 \frac{1}{t^2+3t+2} dt$$

(A) $\uparrow$ verossimilmente

Esercizio $t^2+3t+2 \geq 0 \Leftrightarrow t = \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow t^2+3t+2 = (t+2)(t+1)$

Inoltre $\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{1}{(t+2)(t+1)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$ (metodo dei fratti semplici.)

$\Rightarrow$ le primitive di $\frac{1}{(t+2)(t+1)}$ sono

$$\int \frac{1}{(t+2)(t+1)} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \log|t+1| - \log|t+2| + C$$

$$= \log \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + C$$

Quindi

$$I = -\log \left| \frac{t+1}{t+2} \right| \Big|_{-1/2}^0 + \log \left| \frac{t+1}{t+2} \right| \Big|_0^2 = -\log(1/2) + \log(1/3) + \log(3/4) - \log(1/2)$$

$$= 2\log 2 - \log 3 + \log 3 - \log 4 = \boxed{0}$$

③ $I = \int_{-5}^1 \frac{\text{sign}(t^2)}{(t^2+1)(t^2+2)} dt = \int_{-5}^0 \frac{-1}{(t^2+1)(t^2+2)} dt + \int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)} dt$

cerchiamo le primitive di $\frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)}$:

$$\int \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)} dt = \int \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+2} \right) dt = \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C$$

Quindi $I = - \left[\arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_{-5}^0 + \left[\arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^1$

$$= + \arctan(-5) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{-5}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

④ $I = \int_{-1}^3 \frac{\text{sign}(t^2)}{t^2+5t+6} dt = \int_{-1}^0 \frac{-1}{t^2+5t+6} dt + \int_0^3 \frac{1}{t^2+5t+6} dt$

Ma $\int \frac{1}{t^2+5t+6} dt = \int \frac{1}{(t+3)(t+2)} dt = \int \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \log \left| \frac{t+2}{t+3} \right| + C$

$$\text{Quindi } I = - \lg \left| \frac{t+2}{t+3} \right| \Big|_{-1}^0 + \lg \left| \frac{t+2}{t+3} \right| \Big|_0^3$$

$$= -\lg(2/3) - \lg(1/2) + \lg(5/6) - \lg(2/3) =$$

$$= -2\lg 2 + 2\lg 3 - \lg 2 + \lg 5 - \lg 6 = -4\lg 2 + \lg 3 + \lg 5$$

Exercice n°3

Une suite numérique $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dit convergente se et seulement si la suite des sommes partielles

(ou notée u_n) $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ converge vers un réel S .

On note $s_n = S$ (somme de la suite)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$$

Ⓐ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^\alpha$ (*)

on écrit $b_n = \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^\alpha$ et on a $b_n \geq 0$

puisque la suite est à termes d'égale alternance

La convergence absolue de (*) équivaut à la conv. de la suite $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

on essaie $b_n \approx \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha/2}}$, par le contenu du critère asymptotique $\sum b_n \text{ conv. } \Leftrightarrow \sum \frac{1}{n^{\alpha/2}} \text{ conv.}$
 c'est-à-dire $\frac{\alpha}{2} > 1$ ($\alpha > 2$).

Pour la conv. simple de (*) on peut utiliser le critère de Leibniz qui prouve la conv. si

1) $b_n \geq 0$ vrai

2) $b_n \rightarrow 0$ vrai car $\alpha > 0$

3) $b_n \downarrow$ définitivement : vrai car $\alpha > 0$ puisque

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow \text{ car } \arctan \nearrow \Rightarrow \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow \Rightarrow \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^\alpha \downarrow \text{ car } \alpha > 0$$

oppure non è duetore 3) pensando $\ln f(x)$ dove
 $f(x) = \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^\alpha$ e pensando che $f(x)$ è definitivamente
 decrescente per $x \rightarrow +\infty$. Ma f è derivabile per x grande
 e $f'(x) \propto \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 0$ se x grande
 $\Rightarrow f$ decr. per x grande $\Rightarrow f(x) \neq$ definitivamente zero
 $\Rightarrow$ ten

Quindi (x) conv. sempre e solo per $\alpha > 0$ ed assolutamente
 te $\alpha > 2$

1 cor) (B) (C) (D) sono analoghi

Esercizio 4.

$$(A) \int_2^{+\infty} x^2 \left[\sin \left(x^4 \left(\cos \frac{1}{x} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4} \right) \right) \right]^\alpha dx$$

$f(x)$

$f(x)$ è continua ~~per $x \rightarrow +\infty$~~ ed è integrabile

su ogni intervallo limitato contenuto in $[2, +\infty)$.

Quindi il vero problema potrebbe essere all'infinito

Ma per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = x^2 \left[\sin \left(x^4 \left(\cancel{1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} - \frac{1}{6!x^6} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)} \right) \right) \right]^\alpha$$

$$= x^2 \left[\sin \left(-\frac{1}{6x^2} \right) \right]^\alpha (C + o(1))$$

$\Rightarrow |f(x)| \sim \frac{x^2}{x^{2\alpha}} (C + o(1))$ l'integrale converge se $2\alpha - 2 > 1$
 $2\alpha > 3$
 $\alpha > 3/2$

(B) la funzione integrabile

$$f(x) = x^4 \left[\lg \left(x^3 \left(\lg \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} \right) \right) \right]^\alpha$$

per $x \rightarrow +\infty$
analogamente ad (A)

Ensuite $\lg(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \quad x \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow f(x) = x^4 \left(\lg(\frac{1}{x}) \right)^\alpha (1+o(1)) = \frac{x^4}{x^\alpha} (1+o(1)) = \frac{1}{x^{\alpha-4}} (1+o(1))$

Pour l'intégrale converge on $\alpha-4 > 1 \Rightarrow \boxed{\alpha > 5}$

[C] la fonction intégrable

$f(x) = x^3 \left[\text{sen} \left(x^4 \left(\cos \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{24x^8} \right) \right) \right]^{\alpha/2}$

en suite $\cos \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{24x^8} - \frac{1}{6!x^{12}} + o(\frac{1}{x^{12}}) \quad x \rightarrow \infty$

$|f(x)| = x^3 \left(\text{sen} \left(\frac{x^4}{x^{12}} (1+o(1)) \right) \right)^{\alpha/2} \approx \frac{x^3}{x^{8\alpha/2}} (1+o(1)) \approx \frac{1}{x^{4\alpha-3}} (1+o(1))$

Pour l'intégrale converge on $4\alpha-3 > 1 \Rightarrow \boxed{\alpha > 1}$

[D] la fonction intégrable

$f(x) = x^4 \left[\lg \left(x^2 \left(\lg(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} \right) \right) \right]^{\alpha/3}$

$= x^4 \left[\lg \left(\frac{1}{x^2} (1+o(1)) \right) \right]^{\alpha/3} \approx \frac{x^4}{x^{2\alpha/3}} (1+o(1))$
cfr [B]

$\approx \frac{1}{x^{\frac{2}{3}\alpha-4}} (1+o(1))$

Pour l'intégrale converge on $\frac{2}{3}\alpha-4 > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{15}{2}$

Exercice 5

$f(x) = [(x-a)(x-b)]^{-[(x-a)(x-b)]} \quad a < b$

quelle version

A : $a=2 \quad b=4$

B : $a=2 \quad b=3$

C : $a=-3 \quad b=2$

D : $a=-2 \quad b=4$

donc $f = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b) > 0\} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

oss : $f(x) = e^{-[(x-a)(x-b)]} \lg([x-a)(x-b)]$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$\Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale sia
a $-\infty$ che a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 1$$

oss $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

$\Rightarrow$ f è definita nel suo dominio e

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \left[- (2x - (a+b)) \ln[(x-a)(x-b)] - (2x - (a+b)) \right] \\ &= -f(x) [2x - (a+b)] \{ \ln[(x-a)(x-b)] + 1 \} \end{aligned}$$

Perché $f(x) > 0 \forall x \in \text{dom } f$

il sign f' dipende da $\ln[(x-a)(x-b)]$ e da $2x - (a+b)$

$$2x - a - b > 0 \quad x > \frac{a+b}{2} \quad (\text{può essere tra } a \text{ e } b)$$

$$\ln[(x-a)(x-b)] > -1 \quad (\Leftrightarrow (x-a)(x-b) > 1/e) \quad \text{cioè}$$

$$x^2 - (a+b)x + ab - 1/e > 0$$

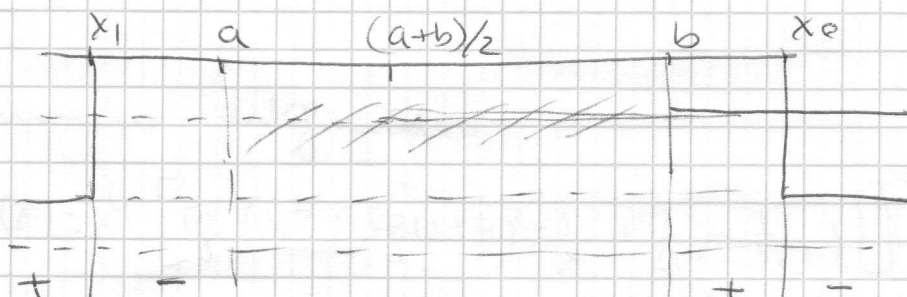
Ma $P(x) = x^2 - (a+b)x + ab - 1/e \geq 0$ per

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - 1/e)}}{2}$$

Cioè per

$$x_0 = \frac{(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - 1/e)}}{2} \quad (\text{oss } x_0 > \frac{a+b+b-a}{2} = b)$$

$$x_1 = \frac{a+b - \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - 1/e)}}{2} \quad (\text{con } x_1 < \frac{a+b-b+a}{2} = a)$$

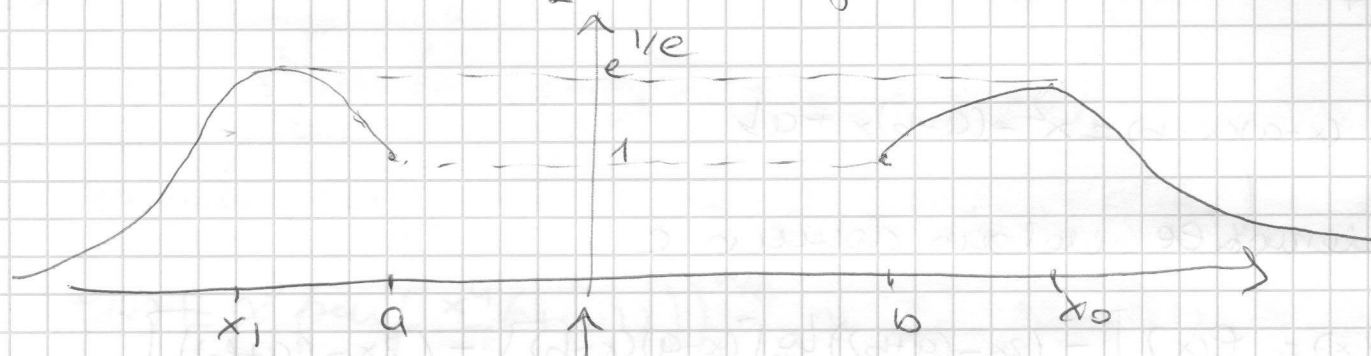


Quindi

$f'(x) > 0$ se $x < x_1$ e se $x \in (b, x_0)$ cresce

$f'(x) < 0$ se $x \in (x_1, a)$ e se $x > x_0$ decresce

Quindi $x = x_0$ e $x = x_1$ sono 2 punti di max. relativo



l'origine è spostato secondo la
versione

$$\text{or } f(x_0) = f(x_1) = e^{-\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = e^{\frac{1}{e}}$$