Soluzioni esame 10-07-2018

Esercizio 1:

$f(x) = x^5 e^{-x^3} \to 0$ per $x \to +\infty$ ma non ha ordine di infinitesimo

$g(x) = \frac{1}{x^7} e^{-10x^2} \to 0$ per $x \to +\infty$ ma non ha ordine di infinitesimo

perché $\frac{f(x)}{g(x)} = x^5 e^{-x^3} \cdot x^7 e^{10x^2} = x^{12} e^{-x^3+10x^2} \to 0$ per $x \to +\infty$

si ha $f(x) = o(g(x))$

$h(x) = \lg\left(\frac{x}{x+1}\right) + e^{-x^3} = \lg\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + e^{-x^3} = -\frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$\sim \frac{1}{x}(c+o(1))$

$h(x) \to 0$ con ordine di infinitesimo $\boxed{\alpha = 1}$ (rispetto al campione $1/x$)

$\ell(x) = \left(\sin\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x+1)^{\frac{1}{4}} = \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{6x^{3/2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)(x+1)^{1/4}$

$= \frac{x^{1/4}}{x^{3/2}}(c+o(1)) = \frac{1}{x^{3/2-1/4}}\,\ell(c+o(1)) = \frac{\ell}{x^{5/4}}(c+o(1))$

$\Rightarrow \ell(x) \to 0$ con ordine di infinitesimo $\boxed{\alpha = 5/4}$ (rispetto al campione $\frac{1}{x}$)

Perciò l'ordine di infinitesimo crescente è

$h(x),\ \ell(x),\ g(x),\ f(x)$

[essendo $g = o(\ell)$ in quanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-10x^2} x^{5/4}}{x^7} = 0$]

Esercizio 2 : Calcolare

$$I = \int_0^{\lg 3} e^{3x} \lg(1+e^x)\,dx$$

posto $e^x = t \Rightarrow x = \lg t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$ $\qquad x = 0 \Rightarrow t = 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x = \lg 3 \Rightarrow t = 3$

quindi

$$I = \int_1^3 t^2 \lg(1+t)\,dt \underset{\text{per parti}}{=} \frac{t^3}{3}\lg(1+t)\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{t^3}{3}\cdot\frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= 9\lg 4 - \frac{1}{3}\lg 2 - \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{t^3}{1+t}\,dt$$

dividendo

$$\begin{array}{l|l} t^3 & 1+t \\ \hline -t^3 - t^2 & t^2 - t + 1 \\ \hline -t^2 & \\ +t^2 + t & \\ \hline t & \\ -t - 1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$

perciò $-\frac{1}{3}\int_1^3 \frac{t^3}{1+t}\,dt =$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \lg|1+t|\right]_1^3$$

Quindi

$$I = 9\lg 4 - \frac{1}{3}\lg 2 - \frac{1}{3}\left[9 - \frac{9}{2} + 3 - \underbrace{\lg 4}_{=2\lg 2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \lg 2\right]$$

$$= 9\lg 4 - \frac{7}{3}$$

Es 3: Polinomio di Mclaurin di ordine 5 di

$$f(x) = x + 7x^3 + x^6 + \lg(1+x^2+x^3)$$

Se $T(x)$ è tale polinomio $(=)$ $f(x) = T(x) + o(x^5)$ per $x \to 0$

e $T(x)$ è <u>unico</u>. Inoltre grado $T(x) \leq 5$

pertanto

essendo $\lg(1+x^2+x^3) = x^2+x^3 - \frac{1}{2}(x^2+x^3)^2 + o(x^5)$

$$= x^2+x^3 - \frac{1}{2}(x^4 + 2x^5 + o(x^5))$$

$$= x^2+x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x^5 + o(x^5)$$

si ha $T(x) = x + 7x^3 + x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x^5 = x + x^2 + 8x^3 - \frac{1}{4}x^4 - x^5$

essendo gli altri termini di f $o(x^5)$!

Esercizio 4: Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x^2}{x^3+3}\right)}{\left(x-\lg(1+x)\right)^\alpha}}_{f(x)}\,dx$$

La funzione integranda ha una singolarità per $x \to 0$ e

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{x^2(1+o(1))}{(\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{1}{2}x^2)^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha-2}}(\xi+o(1)) \quad \text{per } x \to 0$$

inoltre $f \geq 0$ definitivamente per $x \to 0$

quindi vicino a zero l'integrale converge se $2\alpha-2<1$ cioè $\alpha<3/2$

per $x \to +\infty$, $\sin\left(\frac{x^2}{x^3+3}\right) = \frac{1}{x}(1+o(1))$ $\quad$ $f \geq 0$ definitivamente per $x \to +\infty$

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right)$$ perciò l'integrale all'infinito

converge se $\alpha > 0$

Quindi l'integrale improprio è convergente per

$$\boxed{0<\alpha<3/2}$$

Esercizio 5: Studiare $f(x) = (x+8)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ e disegnare un grafico qualitativo (non è richiesto lo studio della derivata II) (5)

$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ e } \frac{x+1}{x-1} \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \text{ e } x > 1\} \cup$

$\cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ e } x < 1\}$

$= (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

f è continua nel suo dominio poiché composizione e prodotto di funzioni continue

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ asintoto verticale

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

mentre per $x \to \pm\infty$

$f(x) = (x+8)\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{1/2} =$

$= (x+8)\left[1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$= x + 9 + o(1)$ per $x \to \pm\infty$

$\Rightarrow y = x+9$ è asintoto obliquo di f sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Per $x \neq -1$ f è derivabile e

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+8)\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\frac{(\cancel{x}-1-\cancel{x}-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x+1)}{(x-1)}(x-1)^2 - (x+8)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{x^2-1-x-8}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

quindi $\text{segn}(f'(x)) = \text{segn}(x^2-x-9)$

ma $x^2-x-9=0$ $\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{37}}{2} = x_1$, $\frac{1-\sqrt{37}}{2} = x_0$

Notiamo che $x_0 < -1$ e $x_1 > 1$

Quindi $f' > 0$ se $x < x_0 \vee x > x_1 \to$ f è crescente in $(-\infty, x_0) \cup (x_1, +\infty)$

mentre $f' < 0$ se $x_0 < x < -1 \vee x \in (1, x_1) \Rightarrow$

f è decrescente in $(x_0, -1) \cup (1, x_1)$

Perciò x_0 è un punto di massimo relativo ⑥

e x_1 è un punto di minimo relativo

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty$$