Soluzioni Test di autovalutazione del 7/12/17

1) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\operatorname{sen} x) - \cos(\operatorname{sen} x + x^5)}{(2\operatorname{sen} x - 2\cos(\sqrt{x}) + 2 - 3x)(e^{x^2}-1)^2}$

Valutiamo il denominatore

$$(e^{x^2}-1)^2 = (x^2+o(x^2))^2 \quad x\to 0^+$$
$$= x^4(1+o(1))$$
$$2\operatorname{sen} x - 2\cos(\sqrt{x}) + 2 - 3x = 2\left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^4)\right) - 2\left(\cancel{1} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{2}} + \frac{x^2}{4!} - \cancel{\frac{x^3}{6!}} + o(x^3)\right)$$
$$+\cancel{2} - \cancel{3x} = -\frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$
$$\Rightarrow \text{denominatore} = -\frac{1}{12}x^6(1+o(1))$$

Numeratore

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} + \frac{(\operatorname{sen}^4 x)}{4!} - \frac{(\operatorname{sen}^6 x)}{6!} + o(x^6)$$
$$\cos(\operatorname{sen} x + x^5) = 1 - \frac{(\operatorname{sen} x + x^5)^2}{2} + \frac{(\operatorname{sen} x + x^5)^4}{4!} - \frac{(\operatorname{sen} x + x^5)^6}{6!} + o(x^6)$$
$$= 1 - \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} + x^5(x+o(x)) + o(x^6) + \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4!} + o(x^6) - \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6!}$$

quindi il numeratore

$$= \cancel{1} - \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} + \frac{(\operatorname{sen} x)^4}{4!} - \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6!} + o(x^6) - \cancel{1} + \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} - \frac{(\operatorname{sen} x)^4}{4!} + \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6!} + x^6 + o(x^6)$$
$$= x^6(1+o(1))$$

Quindi la funzione per $x\to 0^+$ vale $\dfrac{x^6(1+o(1))}{-\frac{1}{12}x^6(1+o(1))} \to \boxed{-12}$

2)

$$a_n = \frac{2^n\left(\sqrt{1+4^{n-1}}-1\right)\left(\sqrt{1+4^{-n}}-1\right)}{n^2} = \frac{2^n \cdot 2^n(1+o(1))\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}4^{-n}+o(4^{-n})\cancel{-1}\right)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2n^2}(1+o(1))$$ ha ordine di infinitesimo $\alpha = 2$

$$b_n = \frac{1}{n\lg(1+n)} \sim \frac{1}{n\lg n}$$ non ha ordine di infinitesimo reale

ma va a zero più lentamente di $a_n$ cioè $a_n = o(b_n)$

$$c_n = \frac{\lg^2 n}{n}$$ non ha ordine di infinitesimo va a zero più lentamente di $b_n$ $\quad b_n = o(c_n)$

$$d_n = \frac{(n+1)!}{(n+2)!-(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!\left[n(n+1)(n+2)-1\right]} = \frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\left[n(n+1)(n+2)-1\right]}$$

$$= \frac{1}{n}(1+o(1))$$ ha ordine di infinitesimo $\alpha = 1$

$$e_n = \left(\frac{1}{n^n} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^n}\right)\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\lg\left(\cancel{\frac{1}{n^n}}-\cancel{\frac{1}{n^n}}+\frac{1}{6n^{3n}}+o\left(\frac{1}{n^{3n}}\right)\right)}$$

$$= e^{\lg\left(\frac{1}{6n^{3n}}(1+o(1))\right)^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{6}\,n^3}(1+o(1)) = \frac{1}{n^3}(1+o(1))$$

$\alpha = 3$ ← ordine di infinitesimo

l'ordine di infinitesimo crescente è pertanto

$c_n \quad d_n \quad b_n \quad a_n \quad e_n$

3) esercizio

$$f(x) = x\sqrt[3]{\frac{|x|}{|x|-4}}$$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$

osserviamo che $f(-x) = -x\sqrt[3]{\frac{|x|}{|x|-4}} = -f(x) \Rightarrow f$ è dispari

perciò si può studiare in $[0,4)\cup(4,+\infty)$ e poi prolungarla in modo dispari in $(-\infty,-4)\cup(-4,0)$

$f(0)=0$ e per $x>0$ $x\neq 4$ $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{x}{x-4}} = x\left(\frac{x}{x-4}\right)^{1/3}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali

Esistono asintoti obliqui? per $x\to+\infty$ $f(x) = x\left(1+\frac{4}{x-4}\right)^{1/3} =$

$$= x\left(1+\frac{4}{3(x-4)}+o\left(\frac{1}{x-4}\right)\right)$$

$$= x+\frac{4}{3}+o(1)$$

$\Rightarrow y = x+\frac{4}{3}$ è asintoto obliquo a $+\infty$

$\lim_{x\to4^\pm} f(x) = \pm\infty$ $\qquad x=4$ asintoto verticale

$x>0$ $x\neq4$ $\quad f'(x) = \left(\frac{x}{x-4}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}x\left(\frac{x}{x-4}\right)^{-2/3}\frac{\cancel{x}-4-\cancel{x}}{(x-4)^2}$

$$= \left(\frac{x}{x-4}\right)^{-2/3}\left[\frac{x}{x-4}-\frac{4x}{3(x-4)^2}\right] = \left(\frac{x}{x-4}\right)^{-2/3}\frac{1}{3(x-4)^2}\left[3x(x-4)-4x\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^{1/3}\frac{1}{(x-4)^{4/3}}\left[3x-16\right]$$

per $x>0$ $x\neq4$ $\quad f'(x)>0$ se $3x>16 \Rightarrow x>16/3 \rightarrow f$ è crescente

$=0$ se $x=\frac{16}{3}$

$<0$ se $x<\frac{16}{3}$ $\rightarrow f$ decrescente

0 ↘ 4 ↘ 16/3 ↗

$x=\frac{16}{3}$ punto di minimo relativo

$\lim_{x\to0^+} f'(x)=0 \Rightarrow f'_+(0)=0 \xRightarrow{f' \text{ pari}} f'_-(0)=0$

$f$ è derivabile in $x=0$

$x\neq4$ $x>0$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3}(x-4)^{-4/3}(3x-16)+\frac{1}{3}x^{1/3}\left(-\frac{4}{3}\right)(x-4)^{-7/3}(3x-16)+\frac{1}{\cancel{3}}x^{1/3}(x-4)^{-4/3}\cdot\cancel{3}$$

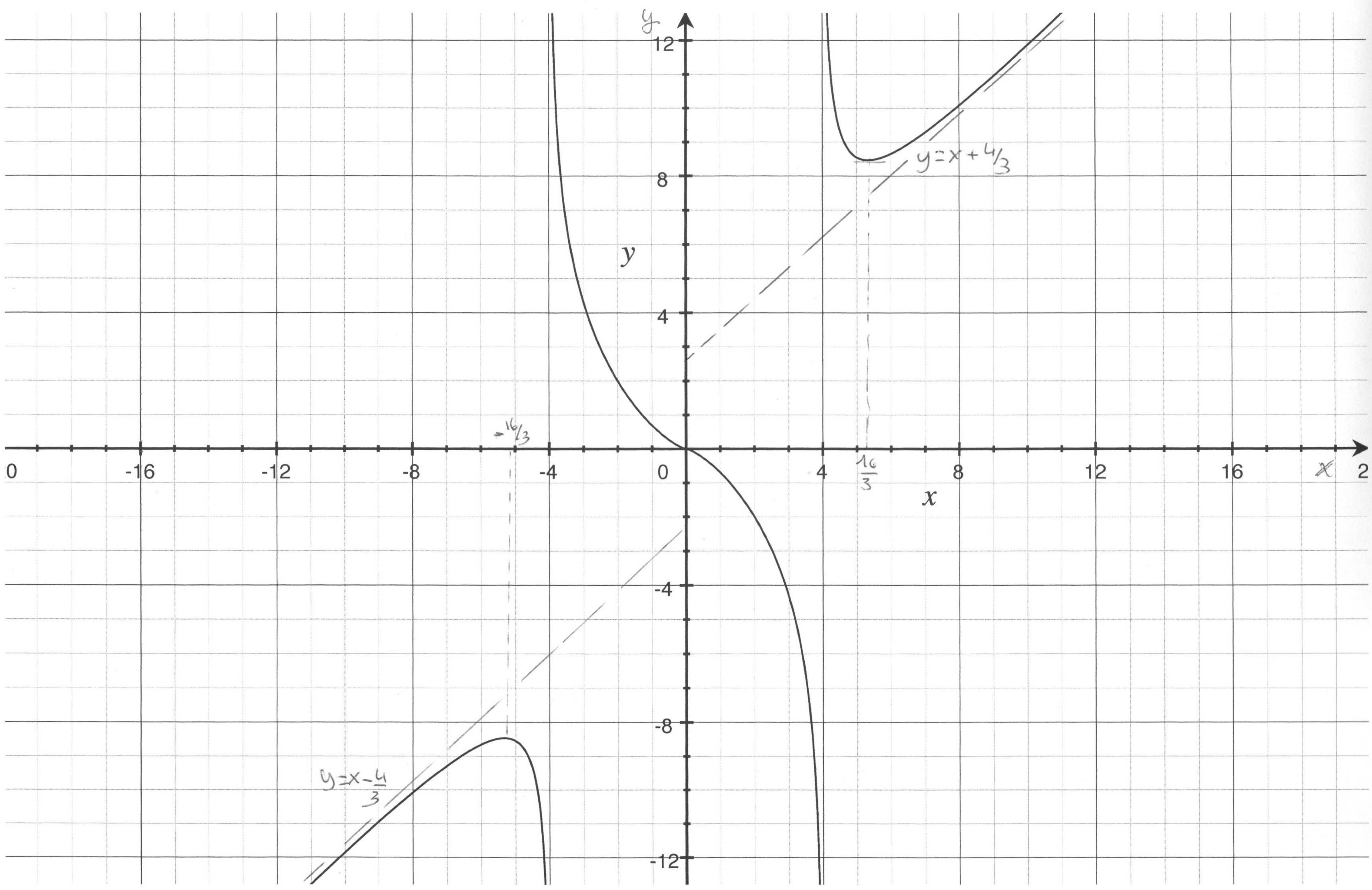
$$= (x-4)^{-7/3}\frac{x^{-2/3}}{9}\left[(x-4)(3x-16)-4x(3x-16)+9x(x-4)\right]$$

$$= \frac{(x-4)^{-7/3}}{6}x^{-2/3}\left[\cancel{3x^2}+64-\cancel{28x}-\cancel{12x^2}+\cancel{64x}+\cancel{9x^2}-\cancel{36x}\right] = \frac{(x-4)^{-7/3}x^{-2/3}\cdot32}{3}$$

$f''(x)>0$ se $x>4$ $\rightarrow$ convessa

$<0$ se $x\in(0,4)$ $\rightarrow$ concava

perché $f$ è dispari in $x=0$ flesso a tg orizzontale



y
x
12
8
4
-4
-8
-12
0
-16
-12
-8
-4
0
4
8
12
16
2
$y = x + 4/3$
$\frac{16}{3}$
$-16/3$
$y = x - \frac{4}{3}$