Test di autovalutazione:

Es. 1

a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-(\cos x)^{1/x} - \frac{x^3+x}{2+x^3}}{\operatorname{arctg}(x^2) + x^3 \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

DEN: $\operatorname{arctg} x^2 + x^3 \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) =$

$= x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0^+$

in quanto

$x^3 \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim x^3 \lg\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$

$-x^3 \lg x$

NUM: $(\cos x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\lg(\cos x)}$

$= e^{\frac{1}{x}\lg(1+(\cos x-1))}$

$= e^{\frac{1}{x}\left[(\cos x-1) - \frac{1}{2}(\cos x-1)^2 + o(x^5)\right]}$

$= e^{\frac{1}{x}\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + o(x^5)\right]}$

$= e^{-\frac{x}{2} + \frac{1}{4!}x^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^3 + o(x^4)} =$

$= 1 - \frac{x}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)}_{-\frac{1}{12}}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^3\right)^2 + o(x^2)$

$= 1 - x/2 + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

NUM:

$$1-(\cos x)^{1/x} - \frac{x^3+x}{2+x^3} = \cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{\frac{x}{2}} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$-\cancel{\frac{x}{2}} + \Bigg(\underbrace{\frac{x}{2} - \frac{x^3+x}{2+x^3}}_{o(1)}\Bigg)$$

$$\frac{\cancel{2x}+x^4-2x^3-\cancel{2x}}{\underbrace{2(2+x^3)}_{o(x^3)}}$$

$$\Rightarrow \text{NUM} = -\frac{1}{8}x^2(1+o(1))$$

$$\Rightarrow \lim = \boxed{-1/8}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \boxed{n^n\left(\frac{n-1}{n+\lg n}\right)^{n^2}} = a_n$$

$$n^n = e^{n\lg n}$$

$$\left(\frac{n-1}{n+\lg n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \lg\left(\frac{n-1}{n+\lg n}\right)}$$

$$\lg\left(\frac{n-1}{n+\lg n}\right) = \lg\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{\lg n}{n}\right)} = \lg\left(1-\frac{1}{n}\right) - \lg\left(1+\frac{\lg n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow n^2 \log\left(\frac{n-1}{n+\log n}\right) = n^2\left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\log n}{n} + \frac{\log^2 n}{n^2} + o\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right]$$

$$= -n - \frac{1}{2} + o(1) - n\log n + \log^2 n + o(\log^2 n)$$

$$= -n\log n - n + o(n)$$

Quindi

$$n^n\left(\frac{n-1}{n+\log n}\right)^{n^2} = e^{\cancel{n\log n} - n - \cancel{n\log n} + o(n)}$$

$$\Rightarrow a_n = e^{-n+o(n)} \to \boxed{0}$$

Es 2

Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la conv. di

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha \left[\lg(1+x)\right]^{\alpha+1}}\,dx$$

Poiché la funzione integranda

$$f_\alpha(x) = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha \left[\lg(1+x)\right]^{\alpha+1}}$$

in $[1,+\infty)$ è illimitata per $x \to 1^+$

Spezziamo $I_\alpha = \underbrace{\int_1^2 f_\alpha(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx}_{I_2}$

I_α converge sse I_1 e I_2 convergono

Per la conv. di I_1 vediamo come si comporta f_α per $x \to 1^+$

$$f_\alpha(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha (\lg 2)^{\alpha+1}(1+o(1))} \qquad x \to 1$$

$$= O\left(\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1/2}}\right)$$

essendo $f_\alpha(x) > 0$ in $(1, +\infty)$

l'integrale I_1 converge $\Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{2} < 1$

cioè $\alpha < 3/2$

(per il criterio del confronto asintotico)

Per la conv. di I_2 vediamo come si comporta f_α $x \to +\infty$

$$x \to +\infty \qquad f_\alpha(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x^\alpha (\lg(1+x))^{\alpha+1}}$$

$$\sim \frac{c}{x^\alpha (\lg x)^{\alpha+1}}$$

$\Rightarrow$ per confronto I_2 conv. sse $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ essendo $\alpha+1=2$

$\Rightarrow$ Quindi I_2 conv. sse $\alpha \geq 1$

Perciò I_2 conv. sse $\boxed{1 \leq \alpha < \frac{3}{2}}$

Es 3 Calcolare $I = \int_2^5 \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(x-1)^2}\,dx$

Vediamo prima una primitiva:

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(x-1)^2}\,dx =$$

$t = \sqrt{x-1} \quad x-1 = t^2 \quad x = t^2+1 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\arctan t}{t^{\cancel{4}\,3}}\,2\cancel{t}\,dt = 2\int \frac{\arctan t}{t^3}\,dt =$$

ove $\frac{2}{t^3} = \left(-\frac{1}{t^2}\right)'$ quindi per parti

$$= -\frac{1}{t^2}\arctan t + \int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = (*)$$

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}$$

$(x) = -\frac{1}{t^2} \operatorname{arctg} t - \frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t + c$

$t = \sqrt{x-1}$

$$I = -\frac{1}{(x-1)} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \Big|_2^5$$

$$= -\frac{1}{4} \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} 2$$

$$+ \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \operatorname{arctg} 2}$$

ES 4
Dopendere al variare di x e R il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left[\lg(2-x)\right]^n}{(n+4)^2}$$

$a_n := \frac{n \left[\lg(2-x)\right]^n}{(n+4)^2}$ def se $2-x>0$
$\boxed{x<2}$

vediamo la conv. assoluta

$$|a_n| = \frac{n\,|\log(2-x)|^n}{(n+4)^2}$$

Serie criterio del rapporto

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n}\,\frac{(n+4)^2}{(n+5)^2}\,|\log(2-x)| \to |\log(2-x)|$$

Quindi, se $|\log(2-x)|<1$ serie conv. assol.:

$$-1 < \log(2-x) < 1$$

$$\frac{1}{e} < 2-x < e$$

$\iff$ $x < 2 - \frac{1}{e}$ e $x > 2-e$

$2-e < x < 2-\frac{1}{e}$ serie conv. assolutamente

se $|\log(2-x)|>1$ $a_n \not\to 0$

$\Rightarrow$ non si ha convergenza assoluta né semplice

se $|\log(2-x)|=1$ $\Rightarrow |a_n| = \frac{n}{(n+4)^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ la serie $\sum |a_n| = +\infty$

se $\lg(2-x) = -1$ cioè se $x = 2 - \frac{1}{e}$

$$\sum a_n = \sum \frac{n}{(n+4)^2}(-1)^n$$

$$\frac{n}{(n+4)^2} \to 0 \qquad a_n \searrow \text{ def?}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{(n+4)^2} > \frac{n+1}{(n+5)^2}$$

$$\left(\frac{x}{(x+4)^2}\right)' = \frac{-x+4}{(x+4)^3}$$

$$= \frac{(x+4)^{\cancel{2}} - x\,2\cancel{(x+4)}}{(x+4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$n(n+5)^2 > (n+1)(n+4)^2$$

$$n(n^2+10n+25) > (n+1)(n^2+8n+16)$$

$$\cancel{n^3} + 10n^2 + 25n > \cancel{n^3} + 9n^2 + 24n + 16$$

$$n^2 + n > 16 \quad \text{ok definitivamente}$$

$\Rightarrow a_n \searrow$ definit. e per il criterio di Leibniz $\sum a_n$ conv. se $x = 2 - \frac{1}{e}$

Quindi si ha conv. assoluta (e dunque semplice) se $\boxed{2-e < x < 2-\frac{1}{e}}$

e conv. solo semplice se $\boxed{x = 2-\frac{1}{e}}$

Esercizio :5

data $f(x) = \lg(2 - |x| e^{-x}) + x$

det dominio, eventuali asintoti, punti di non derivabilità e loro natura, punti di estremo locale, intervalli di monotonia e disegnare un grafico qualitativo

Facoltativo: det # di flessi e dei cambi di concavità (convessità) (non è richiesto il valore dei punti di flesso)

$f(x) = \log\left(2 + |x| e^{-x}\right) + x$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ $\quad f \in C(\mathbb{R})$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e per $x \to +\infty$

$f(x) = x + \log 2 + o(1)$

$\Rightarrow \boxed{y = x + \log 2}$ asintoto obl. a $+\infty$

$x \to -\infty$

$f(x) = \log(2 - x e^{-x}) + x$

$= \log\left(-x e^{-x}\left(1 - \frac{2e^{x}}{x}\right)\right) + x$

$= \log(-x) - \cancel{x} + \cancel{x} + \log\left(1 - \frac{2}{x} e^{x}\right)$

$= \log(-x) - \frac{2}{x} e^{x} = \log(-x) + o(1)$

$\Rightarrow \boxed{f \to +\infty \quad x \to -\infty}$ ma senza asintoto obliquo

$x \neq 0$ f è derivabile

$$f(x)=\begin{cases}\log(2+xe^{-x})+x & x\geq 0\\ \log(2-xe^{-x})+x & x<0\end{cases}$$

~~$x\neq 0$~~

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2+xe^{-x}}(e^{-x}-xe^{-x})+1 & x>0\\[2ex] \dfrac{1}{2-xe^{-x}}(-e^{-x}+xe^{-x})+1 & x<0\end{cases}$$

$$f'=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}\cancel{-xe^{-x}}+2\cancel{+xe^{-x}}}{2+xe^{-x}} & x>0\\[2ex] \dfrac{-e^{-x}\cancel{+xe^{-x}}+2\cancel{-xe^{-x}}}{2-xe^{-x}} & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2+e^{-x}}{2+xe^{-x}} & x>0\\[2ex] \dfrac{2-e^{-x}}{2-xe^{-x}} & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x=0$ punto angoloso

$$f'(x)\xrightarrow[x\to 0^-]{}\frac{1}{2}$$

$f'>0$ se $x>0$ $\qquad f\nearrow$ se $x>0$

se $x<0$ $\quad 2-e^{-x}>0 \quad 2>e^{-x} \quad x>-\log 2$

$f \downarrow$ tra $(-\infty, -\log 2)$

$f \nearrow$ tra $[-\log 2, 0]$

$f \nearrow$ $(0, +\infty)$

$x = -\log 2$ punto di minimo relativo

$$f'' = \begin{cases} \dfrac{-e^{-x}(2+xe^{-x}) - (2+e^{-x})(e^{-x}-xe^{-x})}{(2+xe^{-x})^2} & x>0 \\[2ex] \dfrac{e^{-x}(2-xe^{-x}) - (2-e^{-x})(-e^{-x}+xe^{-x})}{(2-xe^{-x})^2} & x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-2e^{-x} - \cancel{x e^{-x}} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - e^{-2x} + xe^{-2x}}{(2+xe^{-x})^2} \\[2ex] \dfrac{2e^{-x} - \cancel{xe^{-2x}} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-2x} + \cancel{xe^{-2x}}}{(2-xe^{-x})^2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4e^{-x} + 2xe^{-x} - e^{-2x}}{(2+xe^{-x})^2} & x>0 \\[2ex] \dfrac{4e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-2x}}{(2-xe^{-x})^2} & x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-x}(2x-4-e^{-x})}{(2+xe^{-x})^2} & x>0 \\[2ex] \dfrac{e^{-x}(4-2x-e^{-x})}{(2-xe^{-x})^2} & x<0 \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ se $2x-4-e^{-x} > 0$ $x>0$

ma per $x \to +\infty$ $2x-4-e^{-x} \to +\infty$

$2x-4-e^{-x}\Big|_0 = -5 < 0$

$2x-4-e^{-x}$ $\nearrow$ $\Rightarrow$ luminoso zero $x_1 \in (0,+\infty)$

$f'' < 0$ $(0, x_1)$ f concava

> 0 $(x_1, +\infty)$ f convessa

Se $x<0$ $f''>0$ se $4-2x-e^{-x} > 0$

Se chiamiamo $g(x) = 4-2x-e^{-x}$ abbiamo

$g(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$; $g(0) = 3 > 0$

$g'(x) = -2 + e^{-x} > 0$ $x < -\lg 2$; $g(-\lg 2) = 4 + \lg 2 > 0$

$\Rightarrow g \nearrow$ in $(-\infty, -\lg 2)$ e decresce in $(-\lg 2, 0)$

è crescente $\Rightarrow \exists! x_2 \in (-\infty, -\lg 2)$ t.c.

$g(x_2) = 0$ $\Rightarrow f''(x_2) = 0$ inoltre

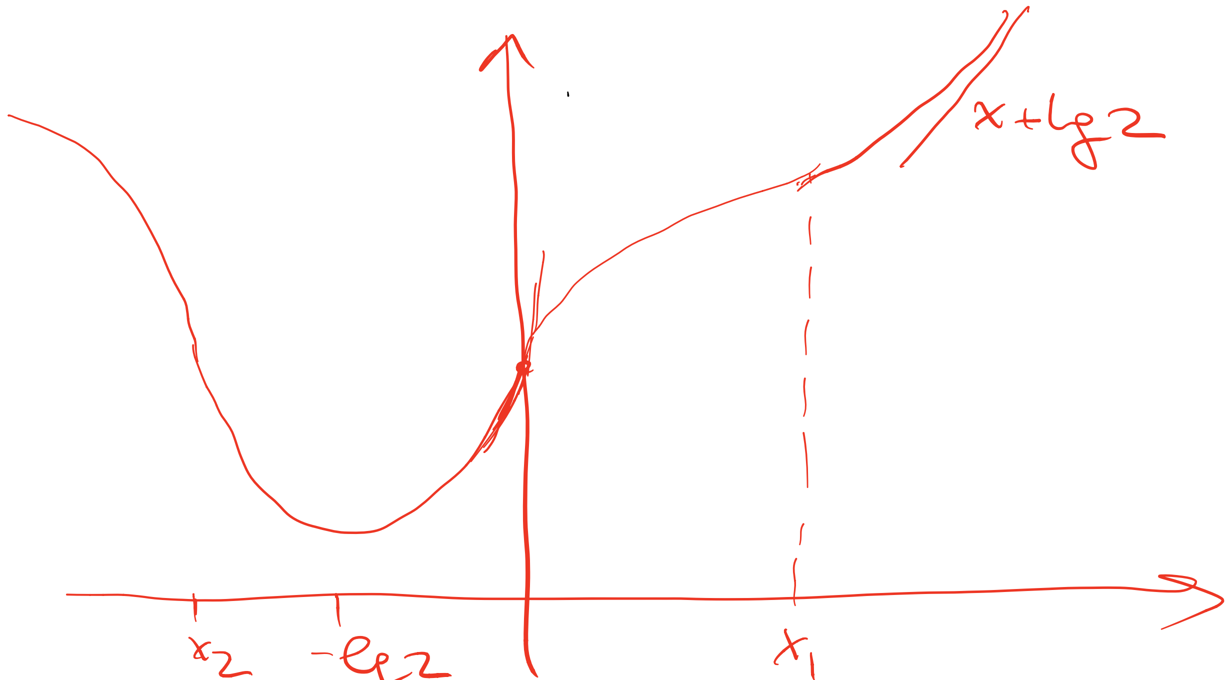
$g(x) < 0$ se $x < x_2$ $\Rightarrow$

$f'' < 0$ $(-\infty, x_2)$ f concava

Invece in $(x_2, 0)$ $g > 0$ $\Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow f$ convessa

x_1 e x_2 sono i soli punti di flesso

<u>oss</u>: attraverso $x=0$ f cambia tipo di concavità ma $x=0$ <u>non</u> è un flesso perché è un pto angoloso quindi $\nexists$ $f'(0) \in \mathbb{R}$



preso in

$\exists$ minimo globale

$$f(-\lg 2) = \lg(2 + 2\lg 2) - \lg 2$$

$$= \cancel{\lg 2} + \lg(1 + \lg 2) - \cancel{\lg 2}$$

$$= \lg(1 + \lg 2) > 0$$