

Topologia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ -Teorema Bolzano
Weierstrass-Principio di Induzione-Limiti di
successioni

Docente: Alessandra Cutrì

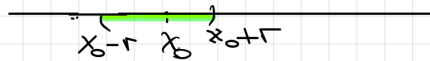
DEFINIZIONE DI INTORNO DI UN

punto $x_0 \in \mathbb{R}$ - SIA $r > 0$

$$I_r(x_0) = \{y \in \mathbb{R} : d(y, x_0) < r\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : |y - x_0| < r\}$$

$$= (x_0 - r, x_0 + r)$$



r : raggio dell'intorno

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE DI PUNTO INTERNO

ad A :

$x_0 \in \mathbb{R}$ è interno ad A se $\exists r > 0$:

$$I_r(x_0) \subset A$$

$\overset{\circ}{A}$ = insieme di
punti interni

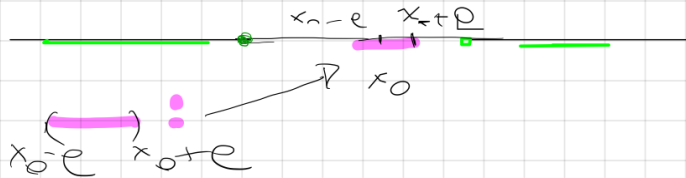


DEFINIZIONE DI PUNTO ESTERNO :

$A \subseteq \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathbb{R} \bar{A}$ ESTERNO ad A

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(x_0) \cap A = \emptyset$$

oss : x_0 esterno ad $A \Leftrightarrow x_0 \in$
interno al complementare A^c



DEF. DI PUNTO DI FRONTIERA per A :

$x_0 \in \mathbb{R}$ è di frontiera per $A \Leftrightarrow$

ogni intorno di x_0 interseca sia A
che $A^c \Leftrightarrow \forall r > 0$

$$I_r(x_0) \cap A \neq \emptyset \quad e$$

$$I_r(x_0) \cap A^c \neq \emptyset$$

∂A : insieme
di punti di
frontiera



• sono i punti di frontiera di A

DEF. DI PUNTO DI ACCUMULAZIONE
per A:

$x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per A
 $(\Leftrightarrow) \forall r > 0 \quad I_r(x_0) \cap A$ contiene
punti di A $\neq$ da x_0

OSS: Perché ciò deve accadere
 $\forall r > 0$, significa che ogni intorno
di x_0 contiene infiniti punti di
A cioè

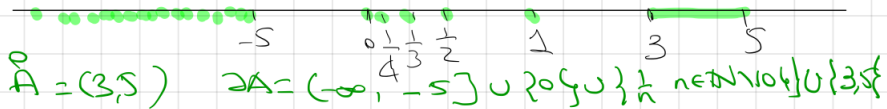
$I_r(x_0) \cap A$ ha infiniti elementi

DEF. del PUNTO ISOLATO

$x_0 \in A$ è isolato per A se non è punto di accumulazione di A

Esempio:

$$A = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, -5)) \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup (3, 5)$$



L'insieme dei punti di accumulazione
di A si chiama DERIVATO di A
 DA

Nell'esempio precedente

$$DA = (-\infty, -5] \cup \{0\} \cup [3, 5]$$

OSS: se $A = \mathbb{Q}$

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \quad \text{perché}$$

$\mathbb{Q}$ non ha punti isolati

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

(OSS: in tal caso $\mathbb{Q} \subset \partial \mathbb{Q}$)

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad \bar{A}$$

APERTO $\Leftrightarrow \forall x_0 \in A \quad \bar{x}_0$ INTERNO ad A

CHIUSO $\Leftrightarrow A^c$ APERTO

DENSO $\Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$ (non esistono
punti interni ad A)

DISCRETO $\Leftrightarrow A$ è costituito solo da
punti isolati

QSS:

$A \text{ chiuso} \Leftrightarrow A^c \text{ aperto}$

$$(\Rightarrow) \partial A \subset A \Leftrightarrow \mathcal{D}A \subset A$$

quindi A contiene tutti i suoi
punti di accumulazione

OSS : $\partial A = \partial(A^c)$

Oss: A e B aperti $\Rightarrow A \cup B$ e $A \cap B$
aperti

A e B chiusi $\Leftrightarrow A \cup B$ e $A \cap B$
chiusi

TEOREMA di BOLZANO-WEIERSTRASS:

Ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato
e infinito (cioè costituito da infiniti
elementi) ammette in $\mathbb{R}$ un punto
di accumulazione

Cioè $\forall A \subset \mathbb{R}$ limitato e infinito

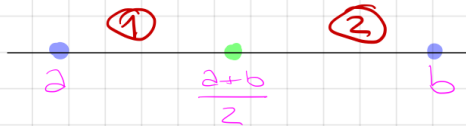
$\exists x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A

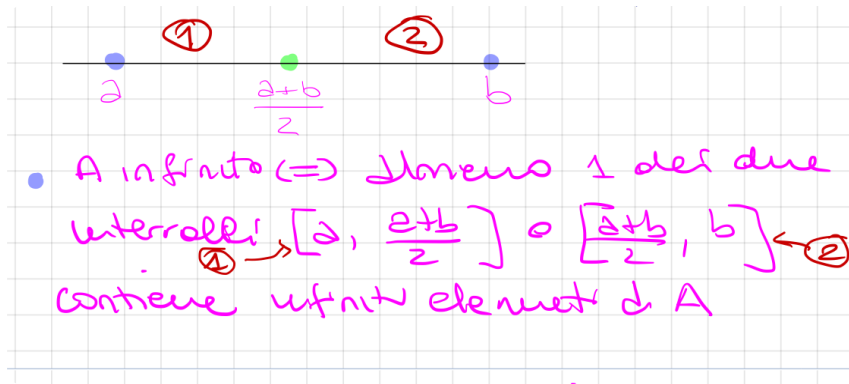
oss: l'esistenza del punto di accumulazione
è fondamentale per parlare di
limiti!

Def: Un'insieme metodo di bisezione

- A limitato ($\Rightarrow$) $\exists$ finiti $a = \inf A$ e

$$b = \sup A \Rightarrow A \subset [a, b]$$





- chiamiamo $[a_1, b_1]$ il sottointervallo di $[a, b]$ che contiene i punti di A

se $\bar{x} \in \textcircled{1}$ allora $a_1 = a$; $b_1 = \frac{a+b}{2}$

se $\bar{x} \in \textcircled{2}$ allora $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$



- dividiamo a metà l'intervallo $[a_1, b_1]$



e consideriamo l'intervallo che
contiene il punto p di A e lo
chiamiamo $[a_2, b_2]$

- ogni volta dando a metà l'intervallo precedente e prendo quello che contiene infiniti punti di A costruendo così

$$I_0 = [a_0, b_0] \quad a_0 = a, \quad b_0 = b$$

$$I_1 = [a_1, b_1] \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$\vdots$$

$$I_n = [a_n, b_n] \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad a_n < b_n$$

I_n contiene infiniti elementi di A

$$I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1 \subset I_0$$

Consideriamo i due insiemi:

$$\Omega_a = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

$$\Omega_b = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$$

Chiamiamo $\lambda_a = \sup \Omega_a$

$$\lambda_b = \inf \Omega_b$$

- $\lambda_a \leq \lambda_b$ perché ogni elemento di Ω_b è maggiorante per Ω_a

Quindi $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq \lambda_a \leq \lambda_b \leq b_n$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_b - \lambda_a} \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \underline{\frac{b-a}{n}}$$

$$2^n > n$$

$$\Rightarrow \lambda_b - \lambda_a = 0 \Rightarrow \lambda_b = \lambda_a =: \lambda$$

(pr. Archimedeo)

λ è punto di accumulazione:

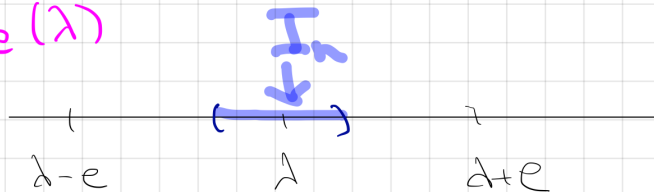
- Mostriamo che a è punto di accumulazione per A

dobbiamo provare che ogni intorno di a contiene infiniti punti di A .

Sappiamo che $\forall n$ I_n contiene
infiniti elementi di A e $|I_n| = \frac{b-a}{2^n}$

Alora $\forall \epsilon > 0$ consideriamo

$I_\epsilon(\lambda)$



e scegliamo n tale che $\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$

$$\Rightarrow I_n \subset I_\epsilon(\lambda)$$

$\Rightarrow I_\epsilon(\lambda) \cap A \supset I_n$ che contiene
infiniti elementi di A

Nelle dimostrazioni del teorema
di Bolzano - Weierstrass abbiamo
usato la disuguaglianza

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$$

Una possibile dimostrazione si fa
usando il procedimento di INDUZIONE

PROCEDIMENTO DI INDUZIONE:

Sia P_n una proprietà dipendente
da un parametro $n \in \mathbb{N}$

- Se P_0 è VERA
- Se P_n VERA $\Rightarrow P_{n+1}$ VERA

(IPOTESI INDUTTIVA)

$\Rightarrow P_n$ è VERA $\forall n \in \mathbb{N}$

Es: $P_n: 2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $P_0: \varphi_0 \geq 0$ E' VERA

•• $2^n > n \stackrel{?}{\Rightarrow} 2^{n+1} > n+1$ ist per Induktion

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n \cdot 2 \geq n+1$$

↑
Upotes
Inductive

$$2^h > n$$

$$(\Rightarrow) n \geq 1 \text{ OK}$$

$$\Rightarrow 2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI:

$$\forall h > -1 \quad (1+h)^n \geq 1+nh$$

- P_0 è vera? $(1+h)^0 \geq 1$ ✓

- P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ vera?

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h \quad \text{da}$$

$$\text{da supporre vero che } (1+h)^n \geq 1+nh?$$

vediamo:

$$\underline{(1+h)^{n+1}} = (1+h)^n (1+h) \stackrel{1+h > 0}{\geq} (1+nh)(1+h)$$

$$= 1+h + nh + h^2n =$$

$$= 1 + (n+1)h + h^2n \geq \underline{1 + (n+1)h}$$

$\Rightarrow$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$

OSS: $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$ perché

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{n\}$$

$\uparrow$
 $I_{1/2}(n)$

$\Rightarrow n$ è isolato

Però se considerarem

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

↑ non è un insieme numerico però
si può considerare totalmente
ordinato

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$[-\infty, a) = (-\infty, a) \cup \{-\infty\}$$

$$[a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\} \quad \text{Intorno di } +\infty$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ intorno di x

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad [-\infty, +\infty]$ intorno di x

oss IN h_2 in $\mathbb{R}^n$ too cause puts $\downarrow$ accumul.

DEFINIZIONE di SUCCESSIONE

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a_n$$

$$\circ f: \mathbb{N} \cap [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a_n$$

$$f(n) =: a_n$$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \circ \quad \{a_n\}_{n \geq n_0}$$

Es. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1 = n_0$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad n \geq 1 = n_0$$

OSS: Abbiamo visto che l'unico
punto di accumulazione di $\mathbb{N}$
è $+\infty$ (in $\mathbb{R}^*$)

I punti di accumulazione
fondamentali

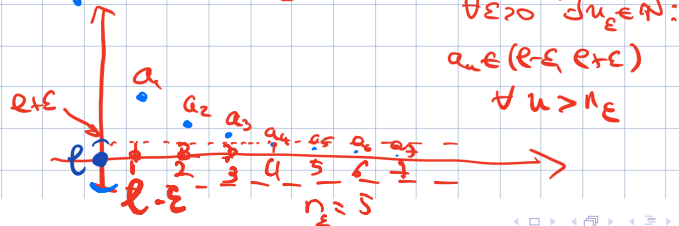
per la definizione di LIMITE

LIMITE $\sim$ comportamento di una
funzione nell'intorno di punti di
accumulazione del suo dominio

DEF. DI $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

l è l'unico punto di
accumulazione di $\mathbb{N}$
(o più in generale di
 $\mathbb{N} \cap [n_0, +\infty)$)

Si analizza il comportamento di a_n
in un intorno di $+\infty$ cioè in un insieme
del tipo $[n_0, +\infty)$



OSS:

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:$

Dire che $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall a_n \in (e - \varepsilon, e + \varepsilon)$
 $\forall n > n_\varepsilon$

significa che

$\forall$ intorno di e $(e - \varepsilon, e + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$

$\exists$ un intorno di $+\infty$ $(n_\varepsilon, +\infty) \quad \exists n_\varepsilon$

t.c. a_n è intorno di $e \quad a_n \in (e - \varepsilon, e + \varepsilon)$

se n è intorno di $+\infty \quad \forall n \in (n_\varepsilon, +\infty)$

(= decanto n inf)

(ε DEFINITIVAMENTE PER $n \rightarrow +\infty$)

oss: $a_n \in (e - \varepsilon, e + \varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - e| < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow d(a_n, e) < \varepsilon$

Esempio:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Infatti: $\forall \varepsilon > 0$ la disuguaglianza

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \text{ è soddisfatta se}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{quindi } \forall n > n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\text{se } n \in \left[\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, +\infty \right)$$

c.v.d.

Esercizio 2:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Infatti: $\boxed{\forall \varepsilon > 0} \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Quindi $\boxed{\exists n_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1}$ $\boxed{\text{t.c.}}$

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon}$$

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Infatti: $\forall \varepsilon > 0$ la disuguaglianza

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow) \quad \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow) \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad (*)$$

Per cui se $\frac{1}{\varepsilon} \leq 1$ basta scegliere

$$n_\varepsilon = 0$$

$$\text{se } \frac{1}{\varepsilon} > 1$$

$$n_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$$

e $(*)$ vale $\forall n > n_\varepsilon$ $n_\varepsilon = \max\{0, \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]\}$

Esercizio

$$a_n = \begin{cases} n! & n \leq 10 \\ \frac{1}{n} & n > 11 \end{cases}$$

$$n \leq 10$$

$$n > 11$$

lim
 $n \rightarrow +\infty$ a_n ?

Si deve trovare l. t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

Quindi il comportamento di
 a_n in un intorno di $+\infty$!

$$\Rightarrow l = 0$$

Cosa accade ai primi termini della
successione NON INTERESSA!!

$$\text{Infatti } \forall \varepsilon > 0 \quad a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

$$n_\varepsilon := \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, 10 \right\}$$

DEF

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Se $\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$$a_n > M \quad \forall n > n_0$$

$$\Updownarrow$$
$$a_n \in (M, +\infty) \quad \forall n \in (n_0, +\infty)$$

$\Updownarrow$
 $a_n > M$ definitivamente in n

Esempio: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ (ovvio)

$\forall M > 0$ scegliendo $n_0 = \lceil M \rceil + 1 \Rightarrow \text{terh}$

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

In fatti $\forall M > 0$ le disuguaglianze

$$2^n > M \quad (\Leftrightarrow) \quad n > \log_2 M$$

$$\text{Se } M \in (0, 1) \Rightarrow \log_2 M < 0 \Rightarrow n_0 = 0$$

$$\text{Se } M > 1 \Rightarrow \log_2 M > 0 \Rightarrow n_0 = [\log_2 M] + 1$$

basta scegliere $n_0 = \max\{0, [\log_2 M] + 1\}$

$$\Rightarrow 2^n > M \quad \forall n > n_0$$

DEF : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

se

$$\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che}$$

$$a_n < -M \quad \forall n > n_0$$

Esempi : $a_n = -n \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow +\infty$

$$a_n = -2^n \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

(*) $a_n = \lg_2 \frac{1}{n} \leftarrow \text{vediamo}$

(*) $\rightarrow -\infty$ per $n \rightarrow +\infty$ Infatti

$$\forall M > 0 \quad \lg_2 \frac{1}{n} < -M \Leftrightarrow -\lg_2 n < -M$$

$$\Leftrightarrow \lg_2 n > M \Leftrightarrow n > 2^M \Rightarrow \boxed{n_0 = \lceil 2^M \rceil + 1}$$

DEF : $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è **INDETERMINATA**

se **NON AMMETTE LIMITE** in $\mathbb{R}^+$
(quindi ne finito né infinito)

Esempio $a_n = (-1)^n$

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

OSS: $\ell \neq 1$ perché se $\varepsilon = 1/2$

$$(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \not\supset a_{2k+1} \quad \forall k$$

Quindi $\exists \varepsilon_0 (= 1/2) > 0$ t.c. $\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0$:

$a_n \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ (basta prendere $n = 2n_0 + 1$)

OSS $\ell \neq -1$ perché se $\varepsilon = 1/2$ $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) = (-3/2, -1/2)$

Quindi $\exists \varepsilon_0 (= 1/2) > 0$: $\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0$: ~~a_{2k}~~

$a_n \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ (basta prendere
 $n = 2n_0$)

