Generalità sulle funzioni

Docente:Alessandra Cutrì

Definizione di funzione

Dati due insiemi X e Y, una funzione

$$f : X \to Y$$

è una legge che
ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y = f(x) \in Y$
ES:

$$X = \{\text{studenti di Tor Vergata}\}, \quad Y = \{\text{corsi di laurea di Tor Vergata}\}$$

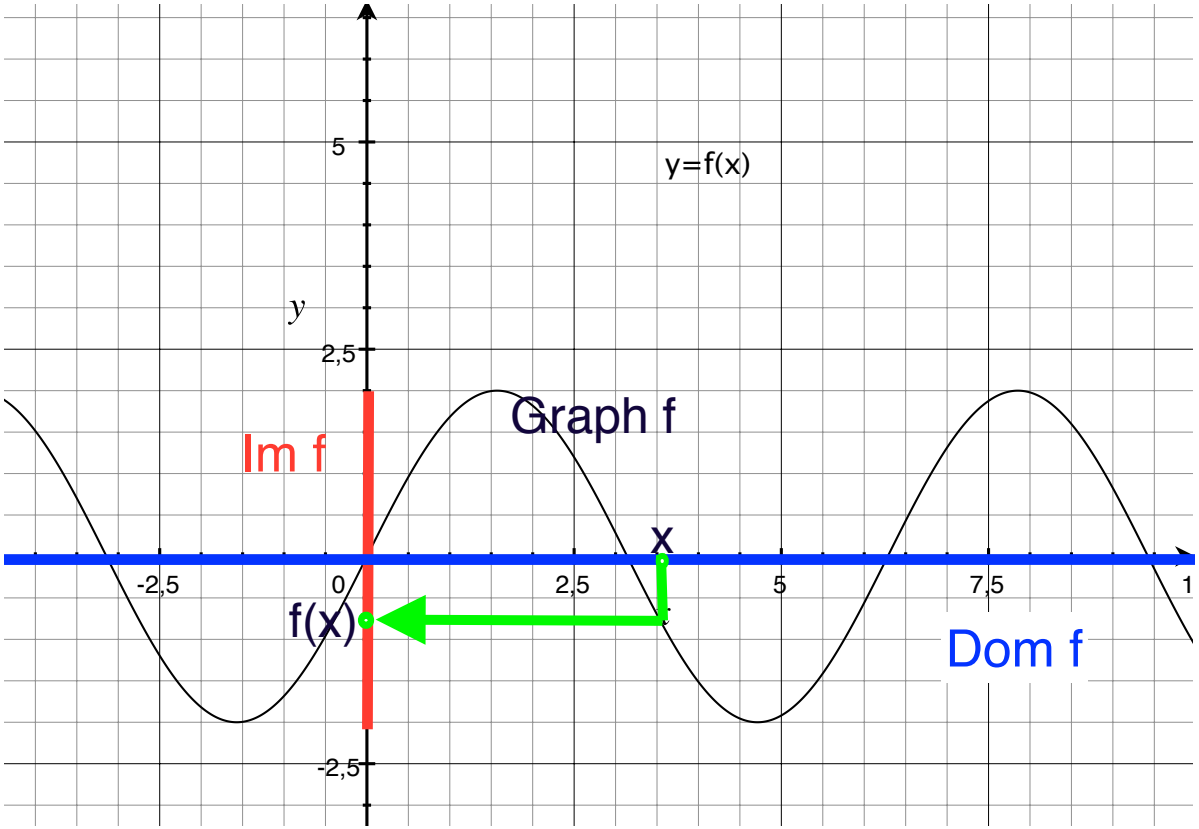
f è la legge che ad ogni studente di Tor Vergata associa il corso di laurea al quale è iscritto. È una funzione poiché ogni studente può essere iscritto al più ad un corso di laurea (non può essere iscritto contemporaneamente a due o più corsi di laurea).
Il viceversa, cioè la relazione che ad ogni corso di laurea associa gli studenti iscritti a quel corso di laurea NON è una funzione perché
$\forall y \in Y \quad \exists$MOLTI studenti iscritti al corso y

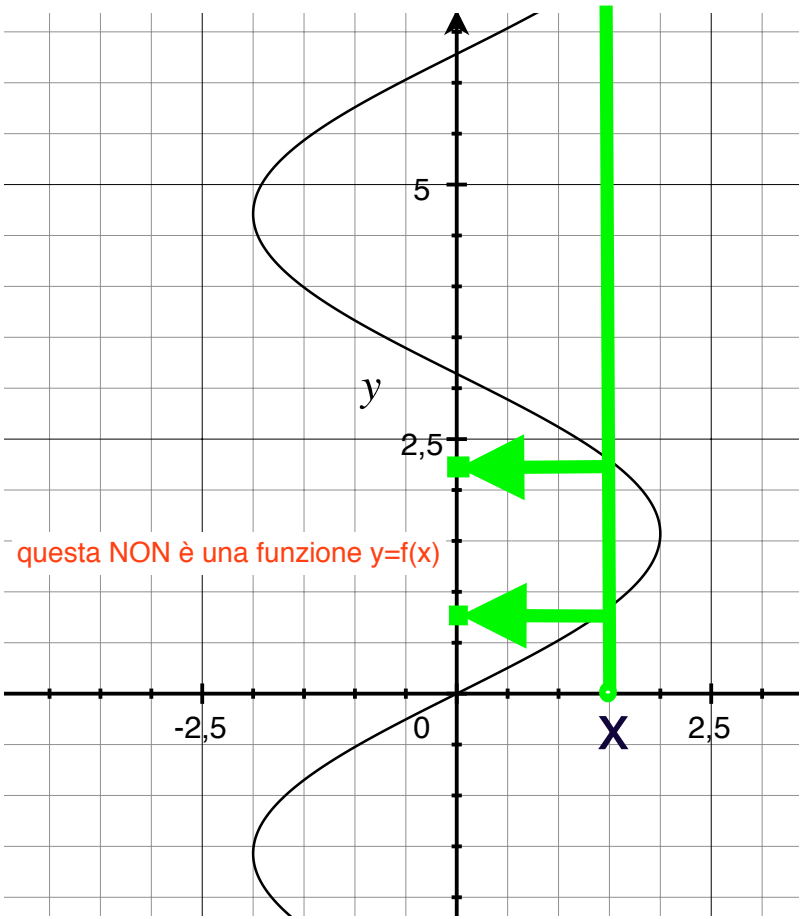
- X si chiama DOMINIO di f (dom$f$)
- Y si chiama CODOMINIO di f
- si chiama IMMAGINE di f:
  $f(X) = \text{im } f := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tale che } y = f(x)\} \subseteq Y$
- si chiama GRAFICO di f:
  $\text{graph } f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$
- sia $B \subset Y$ si chiama CONTROIMMAGINE di B

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : \text{ tale che } f(x) \in B\}$$

Se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ (in tal caso f si chiama funzione numerica) è naturale rappresentare graph $f \subset \mathbb{R}^2$ come un sottoinsieme del piano. L'asse x delle ascisse in genere è l'asse di riferimento per il dominio di f mentre l'asse y delle ordinate è l'asse di riferimento per il codominio di f

OSS: Per le funzioni numeriche si chiama dominio naturale il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove $f(x)$ ha senso


y=f(x)
5
y
2,5
Graph f
Im f
x
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
f(x)
Dom f
-2,5



Perché un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ sia il grafico di una funzione $y = f(x)$ è necessario che ogni retta parallela all'asse y incontri tale sottoinsieme al più in un punto!

Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

- $f : X \to Y$ si dice INIETTIVA se

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

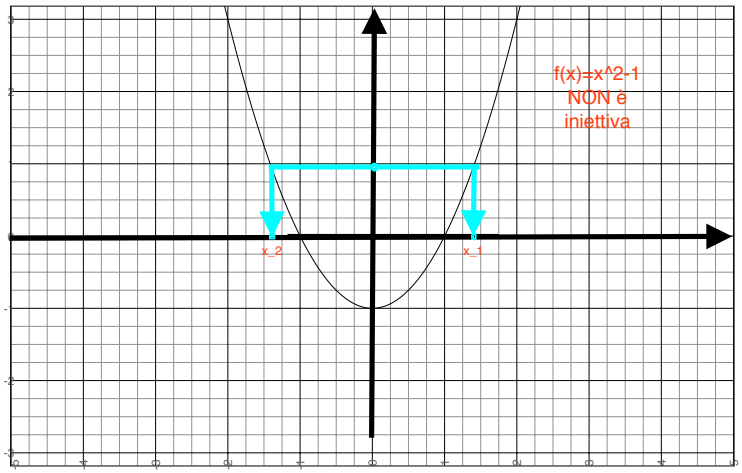
  cioè

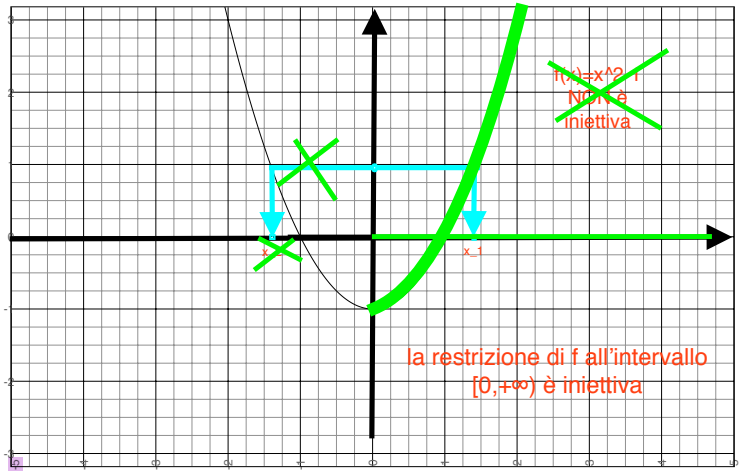
$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- $f : X \to Y$ si dice SURIETTIVA se $Y = \text{im } f$
- $f : X \to Y$ si dice BIIETTIVA se è INIETTIVA + SURIETTIVA

OSS: se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e f è iniettiva, allora ogni retta parallela all'asse x incontra il grafico di f al più in un punto!

Se consideriamo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ non è iniettiva (né suriettiva). Se consideriamo la sua restrizione a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$ cioè $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$ questa è iniettiva (ma non suriettiva):





Oss: $\mathrm{im} f = \mathrm{im} g = [-1, +\infty)$.

Oss: Ovviamente ogni funzione è suriettiva sul suo insieme immagine (cioè scegliendo in questo caso $Y = [-1, +\infty)$ invece che $Y = \mathbb{R}$)

funzione restrizione

Sia $f : X \to Y$ e $A \subset X$. Si chiama Restrizione di f a A:

$$f_{|A} : A \to Y \qquad f_{|A}(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

Nella slide precedente,

$$g(x) = f_{|A}(x) \quad \text{con } A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$$

esistenza e unicità di soluzioni di $y = f(x)$

Spesso nelle applicazioni è importante conoscere se, considerati due insiemi X, Y ed una funzione $f : X \to Y$, esistano soluzioni di $y = f(x)$ e/o vi sia unicità di tali soluzioni. Cioè rispondere a questi due quesiti:

- $\forall y \in Y$ esiste almeno una soluzione x di $y = f(x)$?
  Sì $\iff$ f è suriettiva
- $\forall y \in Y$ esiste al più una soluzione x di $y = f(x)$?
  Sì $\iff$ f è iniettiva

OSS:

- Esistenza + Unicità? Sì $\iff$ $f : X \to Y$ è biiettiva

Funzione inversa

Sia $f : X \to Y$ Iniettiva. Quindi:

$$\forall y \in f(X) \quad \exists! x \in X \quad y = f(x)$$

Perciò si definisce una nuova funzione che ad ogni $y \in f(X)$ associa l'unico $x \in X$ tale che $y = f(x)$:

$$f^{-1} : f(X) \to X \quad y \to x \text{ tale che } y = f(x)$$

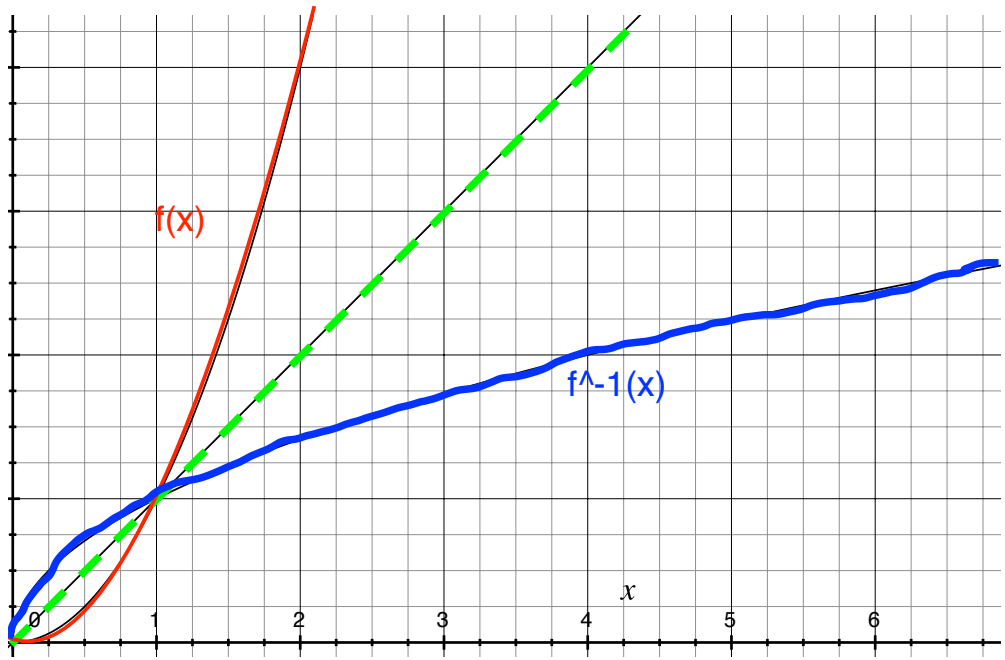
Quindi

$$\forall (x, y) \in X \times f(X) : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

$$dom(f^{-1}) = \text{ im } (f) \quad \text{mentre im } (f^{-1}) = dom(f)$$

OSS: $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$!!

Es. $f(x) = x^2$ su $X = [0, +\infty)$ è iniettiva e $im(f) = [0, +\infty)$.
L'inversa $f^{-1} : y \in [0, +\infty) \to x \in [0, +\infty) \quad : \quad x^2 = y$
quindi $|x| = \sqrt{y}$ e, dovendo essere $x \geq 0$ (poiché $x \in dom(f)$),
$x = \sqrt{y}$.



Se consideriamo la restrizione di $h(x) = x^2$ al sottoinsieme $X = (-\infty, 0]$, anche questa funzione è iniettiva. Chi è l'inversa?

$h^{-1} : h(X) = [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$ definita da:

$$h^{-1}(y) = x \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Quindi $h^{-1}(y) = -\sqrt{y} \qquad \forall y \geq 0$

Se consideriamo la restrizione di $h(x) = x^2$ al sottoinsieme $X = (-\infty, 0]$, anche questa funzione è iniettiva. Chi è l'inversa? $h^{-1} : h(X) = [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$ definita da:

$$h^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Quindi $h^{-1}(y) = -\sqrt{y} \qquad \forall y \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è iniettiva?

SI' perché $\forall x_1, x_2 \in X \quad : \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ Quindi è invertibile.

Chi è $f(X)$? $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Chi è f^{-1}?

è la funzione stessa $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è iniettiva?

SI' perché $\forall x_1, x_2 \in X \quad : \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ Quindi è invertibile.

Chi è $f(X)$? $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Chi è f^{-1}?

è la funzione stessa $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

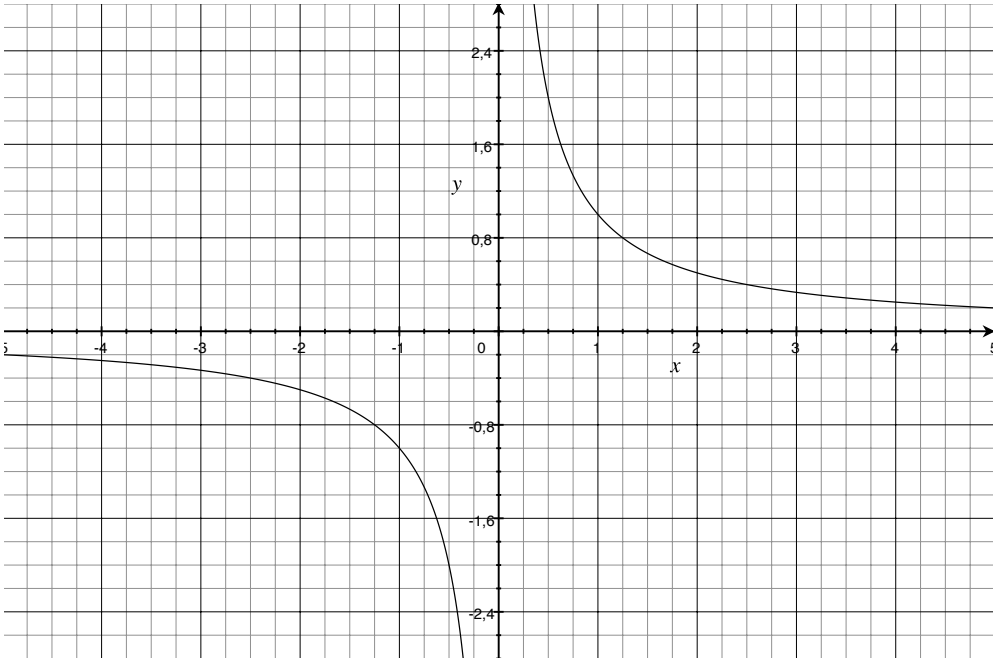
è iniettiva?

SI' perché $\forall x_1, x_2 \in X \quad : \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ Quindi è invertibile.

Chi è $f(X)$? $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Chi è f^{-1}?

è la funzione stessa $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Composizione di funzioni

Supponiamo di avere $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ allora

$$\forall x \in X \Rightarrow f(x) \in Y = dom(g) \quad \Rightarrow g(f(x)) \text{ è ben definita}$$

$$\begin{cases} g \circ f : X \to Z \\ g \circ f : x \to g(f(x)) \end{cases}$$

In generale, se $f : X \to Y$ e $g : V \to Z$, perché sia definita $g \circ f$ deve essere $f(X) \cap V \neq \emptyset$ ed il

$$dom(g \circ f) = \{x \in X : f(x) \in V\} \subseteq X$$

ma può anche essere strettamente contenuto in X.

OSS: Anche se le due operazioni di composizione fossero possibili, $g \circ f \neq f \circ g$ (la composizione di funzioni non è commutativa) però vale la proprietà associativa, cioè:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Esempio: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$. Si ha $dom(f) = \mathbb{R}$, $dom(g) = [0, +\infty)$ Chi è $g \circ f$?

$$dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R}, : x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

e

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad \forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

OSS:
Invece si ha $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1 \qquad \forall x \in [0, +\infty)$

Osserviamo che se $f : X \to Y$ è Iniettiva, allora

$$f^{-1} \circ f : X \to X \qquad f^{-1} \circ f : x \to x \quad \forall x \in X$$

(è la funzione Identità $I_{|X}$ dell'insieme X) mentre

$$f \circ f^{-1} : f(X) \to f(X) \qquad f \circ f^{-1} : y \to y \quad \forall y \in f(X)$$

(è la funzione Identità $I_{|f(X)}$ dell'insieme $f(X)$)

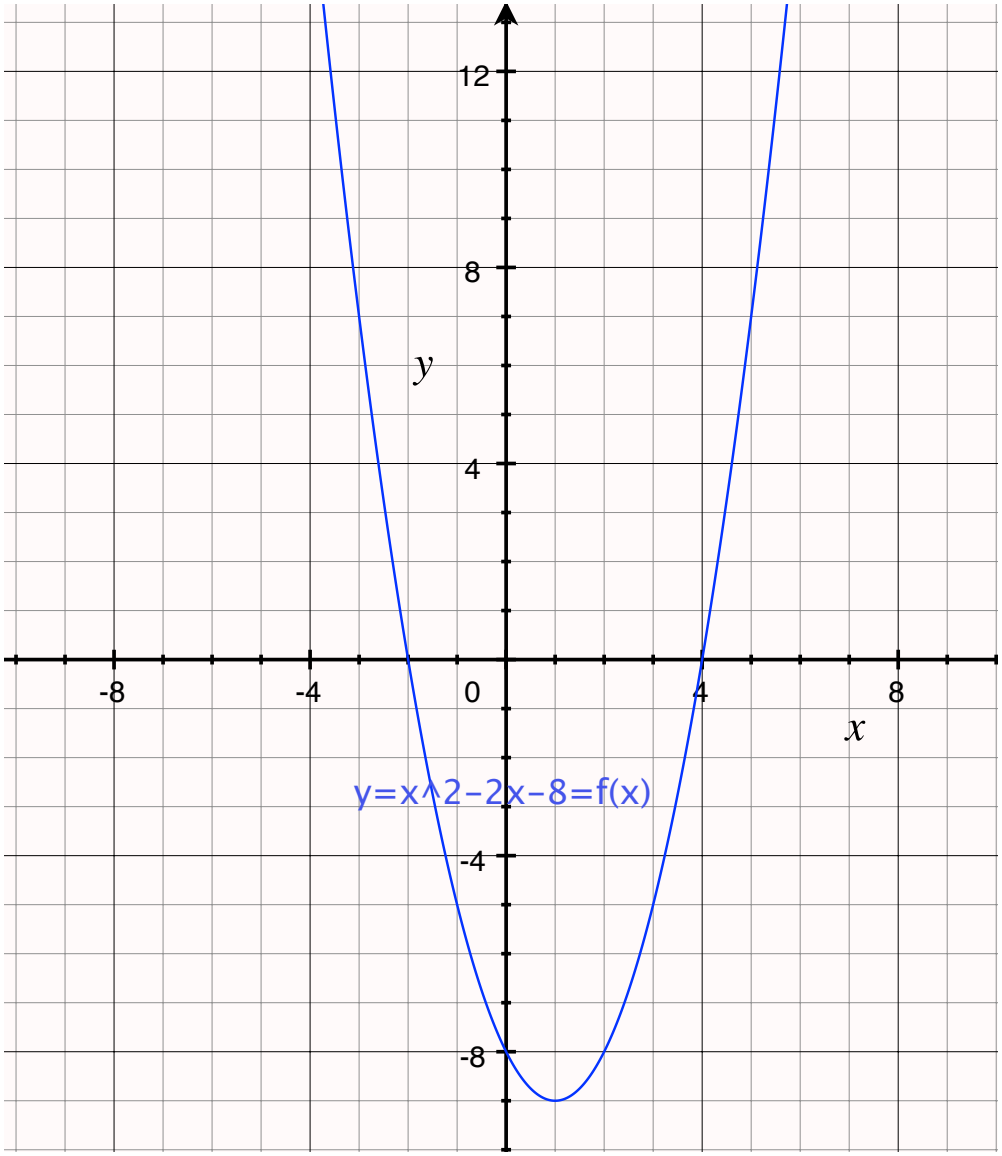
Esercizio: Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : [-3, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite da:

$$f(x) = \begin{cases} -4 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -3 \leq x < 0 \\ 25 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

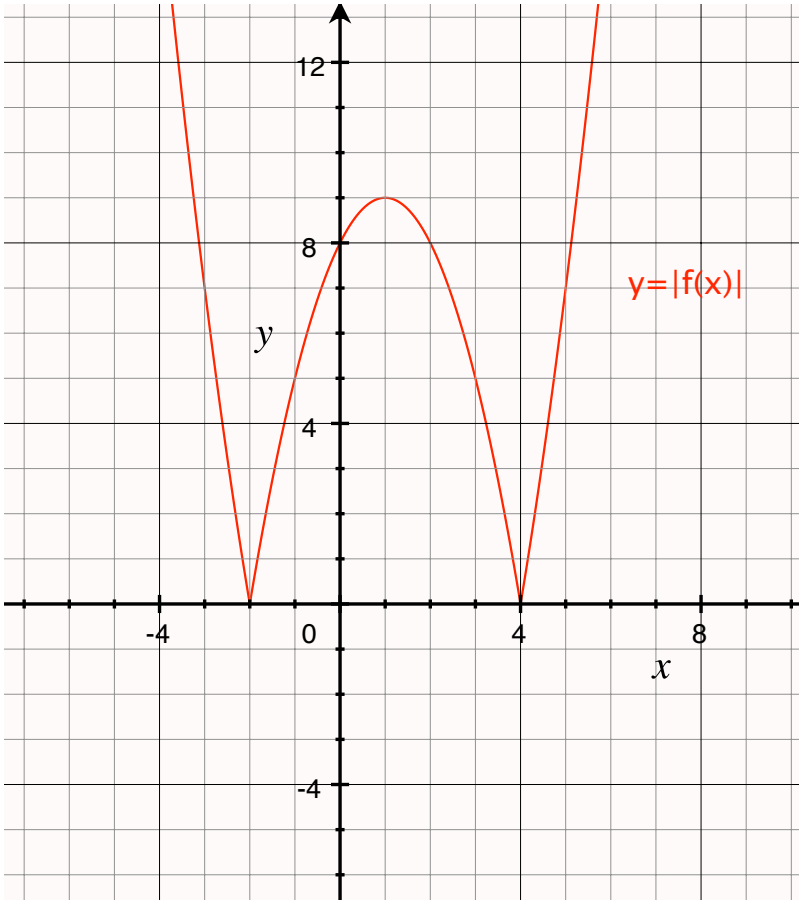
Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$ specificando i dominii.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 2x - 8 = (x-1)^2 - 9$.



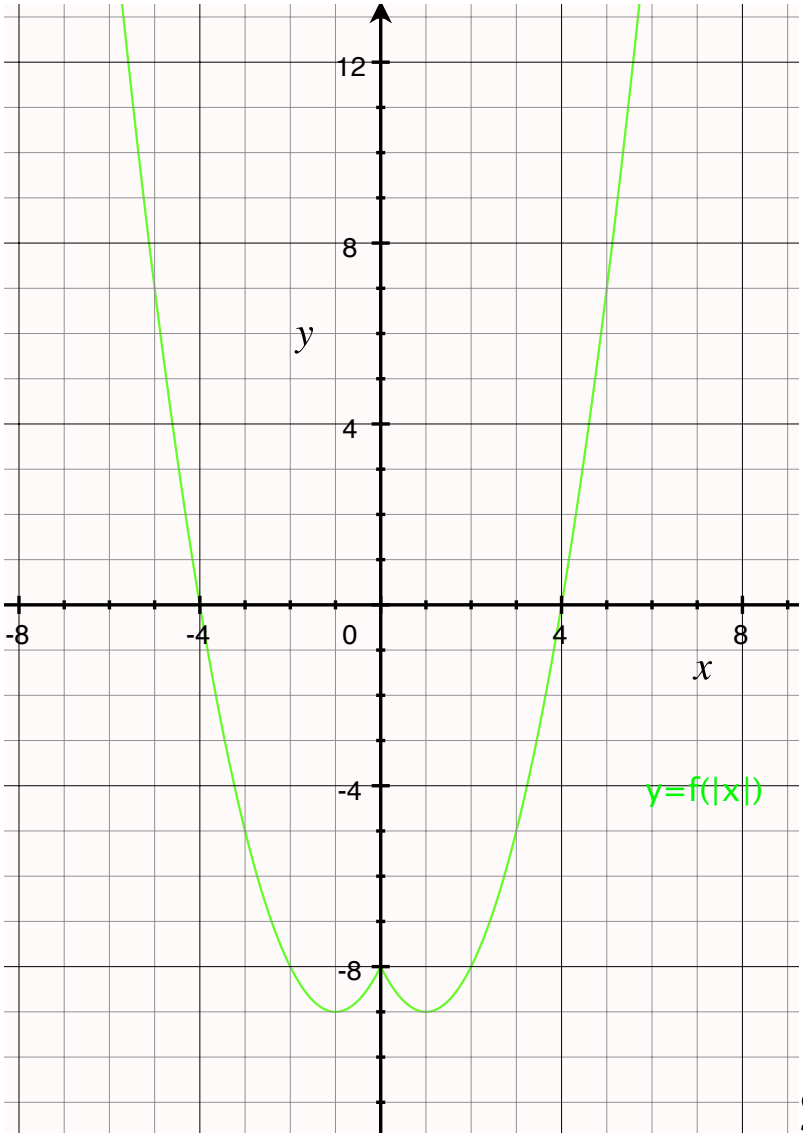
Potremmo vedere $f = g \circ h$ con $h(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 - 9$. Si ha $dom(f) = \mathbb{R}$, $im(f) = [-9, +\infty)$

Consideriamo ora $\phi(x) = |x^2 - 2x - 8| = |f(x)|$.



Si ha $\phi = \lambda \circ f$ con $\lambda(x) = |x|$

Consideriamo ora $\psi(x) = x^2 - 2|x| - 8 = |x|^2 - 2|x| - 8 = f(|x|)$.



Si ha $\psi = f \circ \lambda$ con $\lambda(x) = |x|$

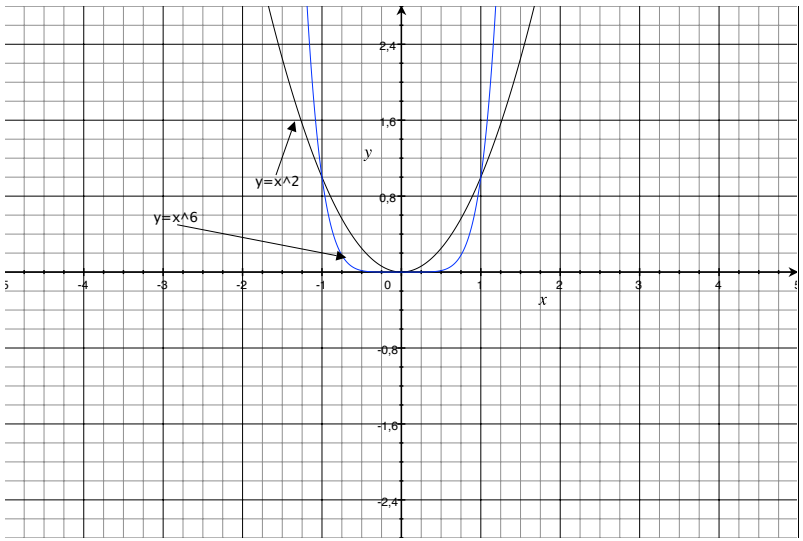
La funzione $y = \psi(x)$ della slide precedente è definita su $dom\psi = \mathbb{R}$ (insieme simmetrico rispetto all'origine) e verifica :

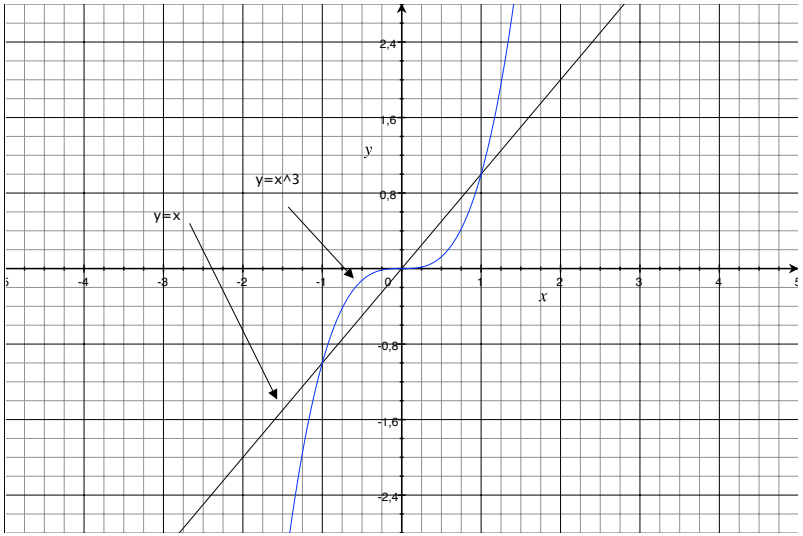
$$\psi(x) = \psi(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il suo grafico è pertanto simmetrico rispetto all'asse y. ψ si dice funzione pari

Analogamente: Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ tale che $-x \in X \ \forall x \in X$ (simmetrico rispetto all'origine). Allora f si dice dispari $\iff$ $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X$

Es: $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$ è pari se n è pari ed è dispari se n è dispari





Funzioni monotone

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$

- f si dice crescente in A: se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 > x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- f si dice strettamente crescente in A: se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 > x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$;
- f si dice decrescente in A: se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 > x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f si dice strettamente decrescente in A: se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 > x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$;

f è Monotona in A ses f è Crescente in A (o Decrescente in A), f è strettamente monotona in A se f è strettamente crescente in A (o strettamente decrescente in A)

Le funzioni strettamente monotone in A sono iniettive in A

Le funzioni f strettamente monotone in A sono iniettive in A. E la funzione inversa f^{-1} è strettamente monotona in $f(A)$. Infatti,

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ oppure } x_1 > x_2$$

Se f è strettamente crescente, si ha nel primo caso $f(x_1) < f(x_2)$, nel secondo $f(x_1) > f(x_2)$. Se invece f è strettamente decrescente, si hanno le disuguaglianze opposte. In ogni caso sarà

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \Rightarrow f \text{ è iniettiva.}$$

Inoltre se f è strettamente crescente, anche f^{-1} lo è: Siano $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in dom(f^{-1}) = Im(f)$, allora esistono $x_1, x_2 \in dom(f)$ tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ quindi $f(x_1) < f(x_2)$.
Poiché f è strettamente crescente, deve allora essere $x_1 < x_2$.
Quindi $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}$è strettamente crescente.

Il viceversa non è vero in generale: Infatti esistono funzioni iniettive in A che non sono strettamente monotone in A:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è iniettiva in A ma non è monotona in A.

Oss: f è strettamente monotona decrescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, +\infty)$ ma non è strettamente decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: prendere $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ si ha $x_1 > x_2$ ma $\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$.

Questo vale per $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$ dispari.

Altro esempio di funzione invertibile ma non strettamente monotona in $A = dom(f) = [0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Si ha in particolare $f^{-1}(x) = f(x)$.

Altro esempio di funzione invertibile ma non strettamente monotona in $A = dom(g) = \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$$

in tal caso

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ \frac{x}{3} & x \geq 0 \end{cases}$$

Le funzioni esponenziali e logaritmiche

Sia $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Allora è possibile definire $f(x) = a^x$.

- Se $x \in \mathbb{Q}$ noto
- Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x > 0$. Allora $x = p, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$. Se $a > 1$, si definisce

$$a^x := \sup\{a^{p,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

(l'estremo superiore esiste in $\mathbb{R}$ poiché l'insieme è limitato superiormente da a^{p+1})

Es. sappiamo che $\sqrt{2} = 1,4142\alpha_5 \dots \alpha_n \dots$

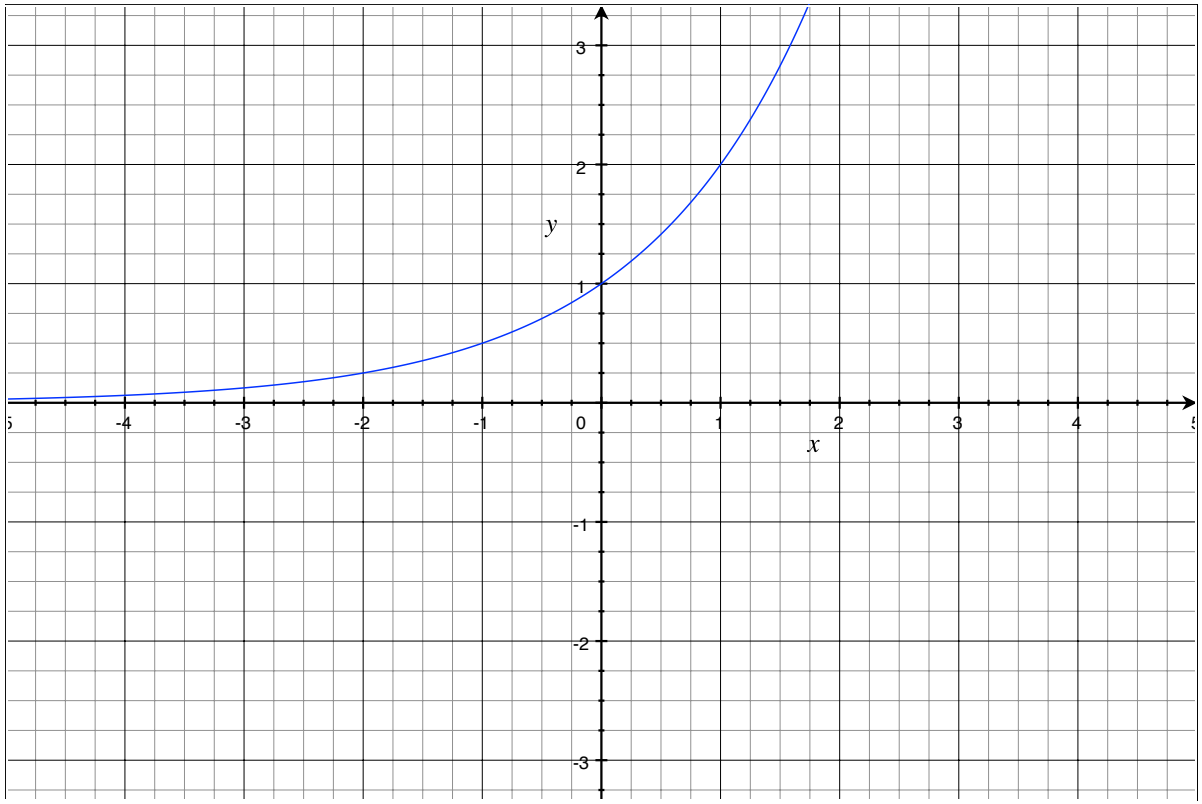
$$3^{\sqrt{2}} := \sup\{3^{1,4}, 3^{1,41}, 3^{1,414}, \dots, 3^{1,4142\alpha_5\dots\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\}$$

(sappiamo che cosa si intende per a^x se $x \in \mathbb{Q}$ e usiamo questo e la completezza di $\mathbb{R}$ per definire a^x quando x è irrazionale. Se $a \in (0,1)$ e $x \in \mathbb{R}^+$ si definisce $a^x := \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$ ($\frac{1}{a} > 1$) Se $x < 0$ si definisce $a^x := \frac{1}{a^{-x}}$

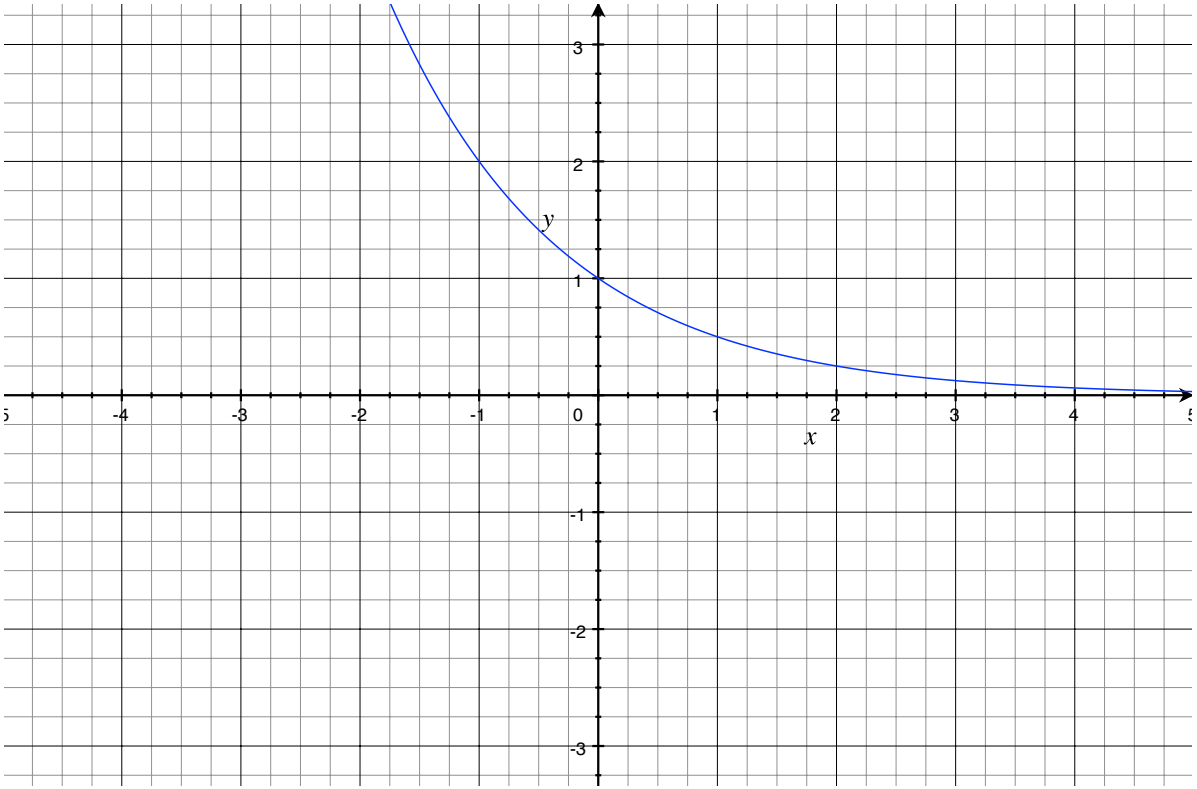
- Se $a = 1 \Rightarrow a^x = 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Ripassare le proprietà delle funzioni potenza ed esponenziali (cfr. per es. BDG cap.1, pag.16)

- Se $a > 1$, a^x è una funzione strettamente crescente e positiva (cioè $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$). La sua immagine è $(0, +\infty)$ ed il suo grafico è:

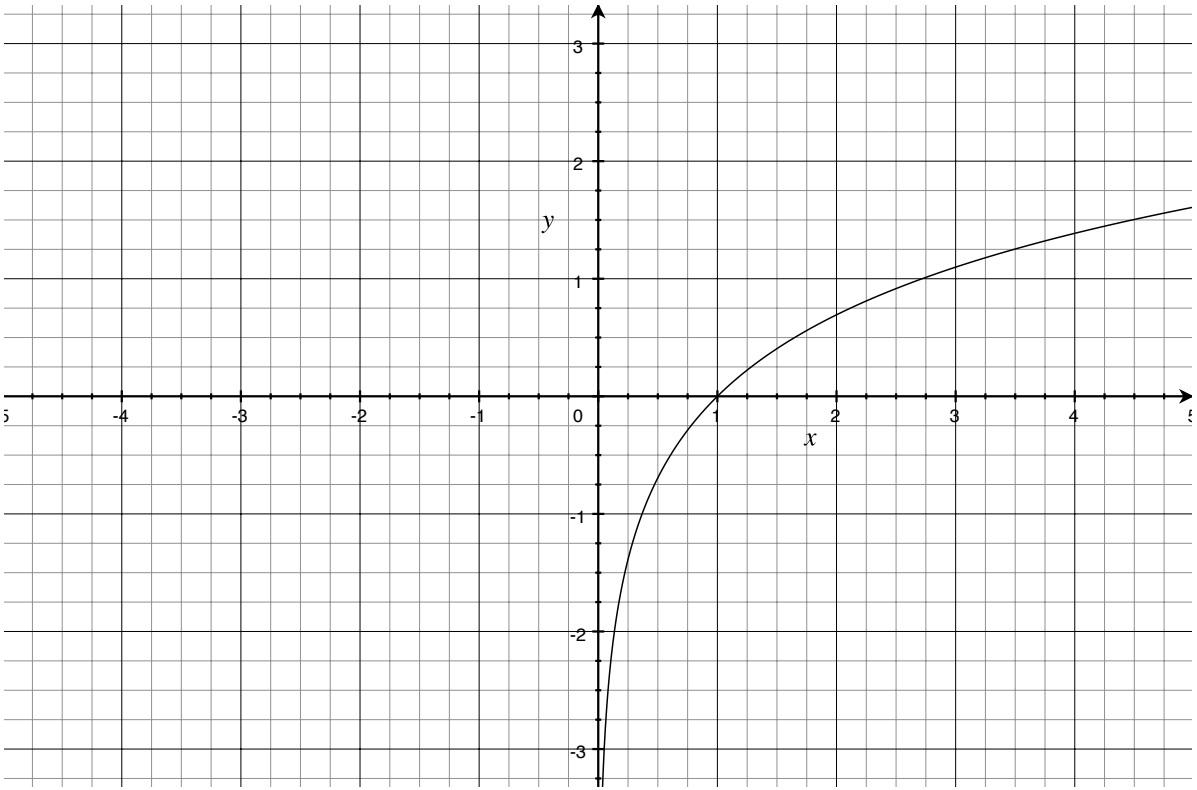


- Se $0 < a < 1$ a^x è una funzione strettamente decrescente e positiva (cioè $a^x > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$). La sua immagine è $(0, +\infty)$ ed il suo grafico è:

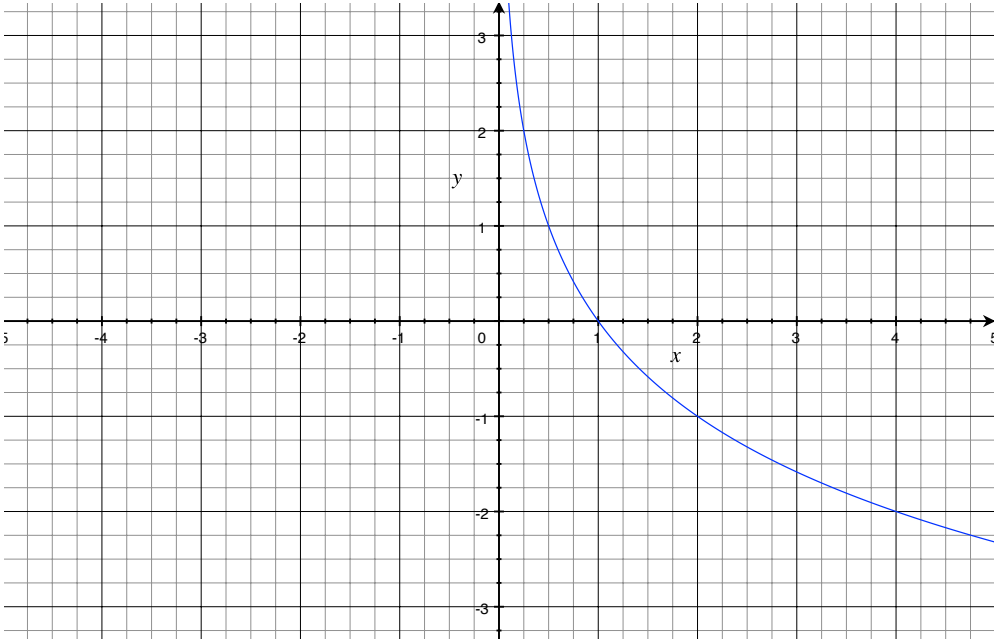


Essendo $x \to a^x$ una funzione strettamente monotona, è invertibile. La sua inversa è definita in $(0, +\infty)$ da:
Per ogni $y \in (0, +\infty)$, esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$.
Questo x prende il nome di $\log_a(y)$ (è l'esponente da dare ad a per ottenere y, cioè: $a^{\log_a y} = y$).

- $a > 1 \Rightarrow \quad x \to \log_a x$ è strettamente crescente ed ha come immagine $\mathbb{R}$. Il suo grafico è:



- $0 < a < 1 \rightarrow \quad x \rightarrow \log_a x$ è strettamente decrescente ed ha come immagine $\mathbb{R}$. Il suo grafico è:



Oss: in ogni caso si ha

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \cdot y > 0$$

Per passare da una base all'altra:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \forall a, b > 0, a, b \neq 1, \forall x > 0$$

Riguardare proprietà dei logoritmi (cfr. ad es. BDG pag. 18)

- Esercizio: Determinare $x \in \mathbb{R}$ tali che:

$$1 < \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-4} \leq 27$$

- Esercizio: Determinare il dominio naturale della seguente funzione:

$$f(x) = \log_{10}(x - |x^2 - 2|)$$

- Esercizio: Determinare il dominio naturale della seguente funzione:

$$g(x) = \sqrt{\log_2(x+3)} + \sqrt{5 - x^2}$$

- Esercizio: Determinare il dominio naturale della funzione $h(x) = \frac{1}{\log_2(\sqrt{x^3+3}-10)}$

Funzione periodica

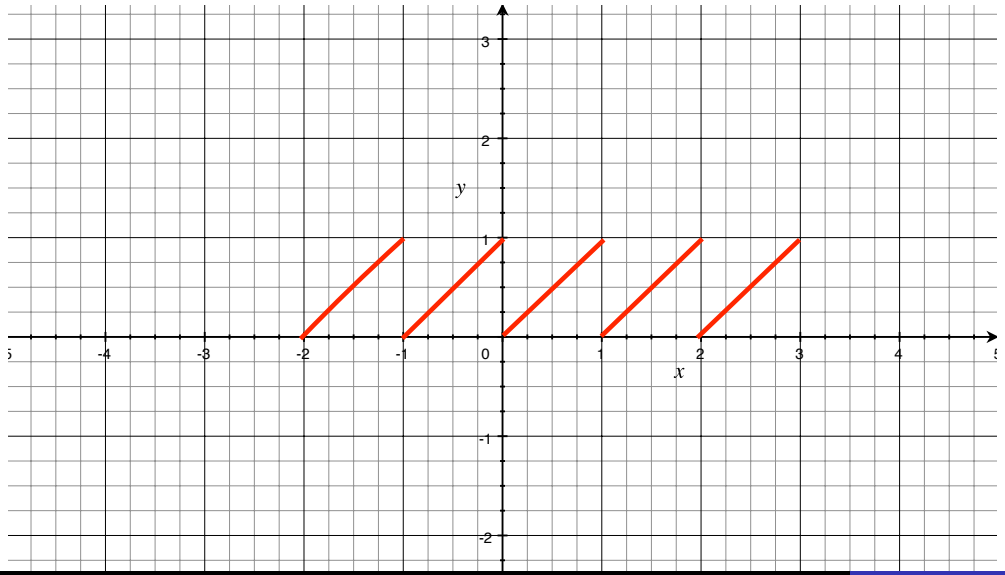
Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice periodica se $\exists P > 0$ tale che

$$x + P \in A \text{ per ogni } x \in A \quad \text{e} \quad f(x+P) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$

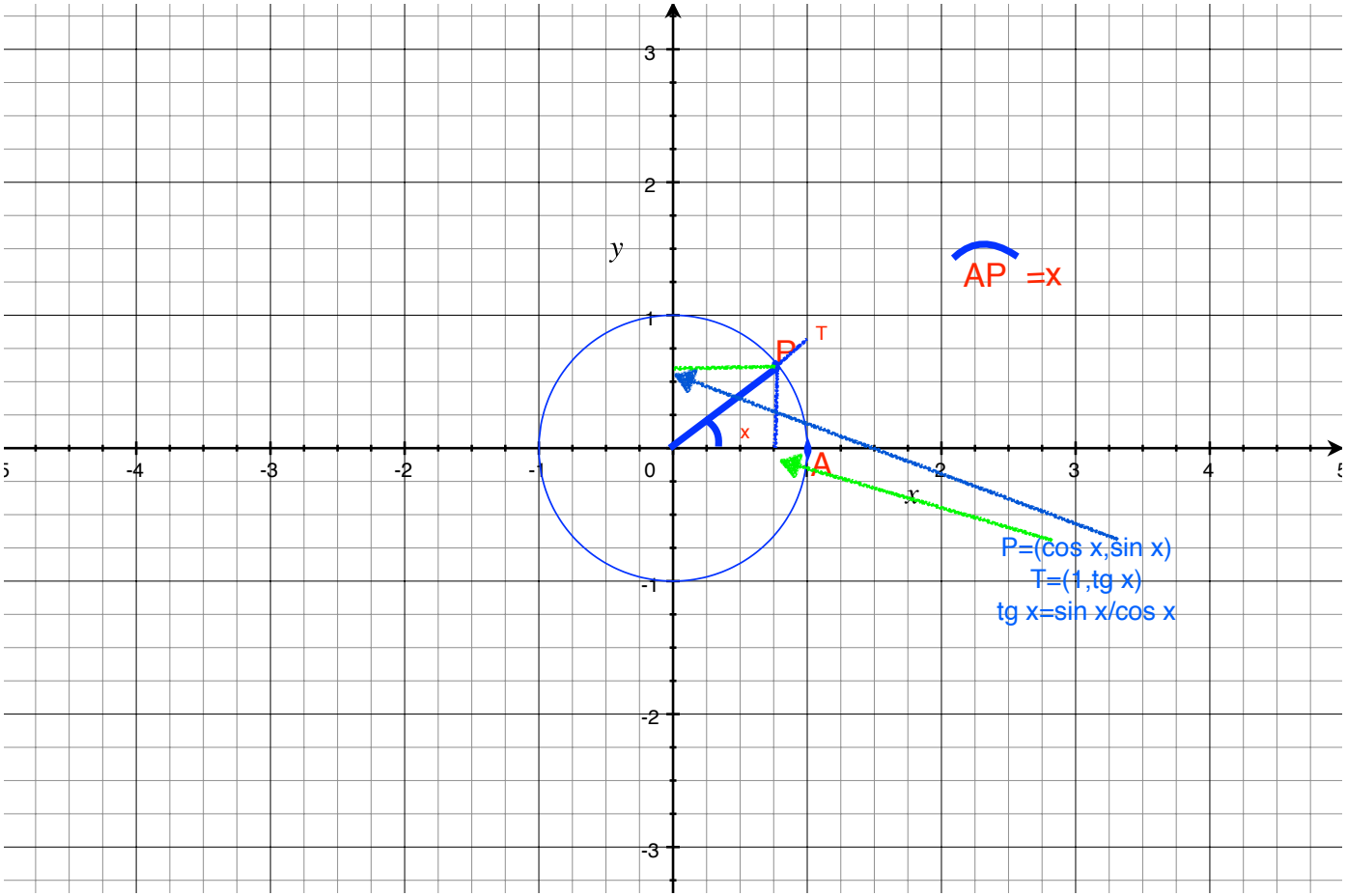
In tal caso si definisce periodo T di f

$$T := \inf\{P > 0 : f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in A\}$$

Esempio: $f(x) = x - [x]$ (funzione mantissa di x) è periodica di periodo $T = 1$



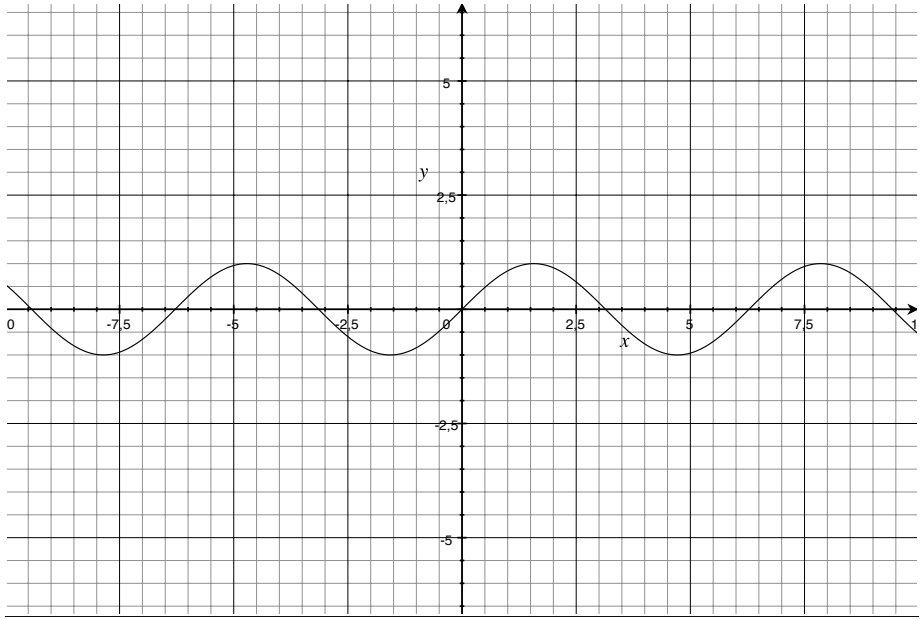
funzioni trigonometriche



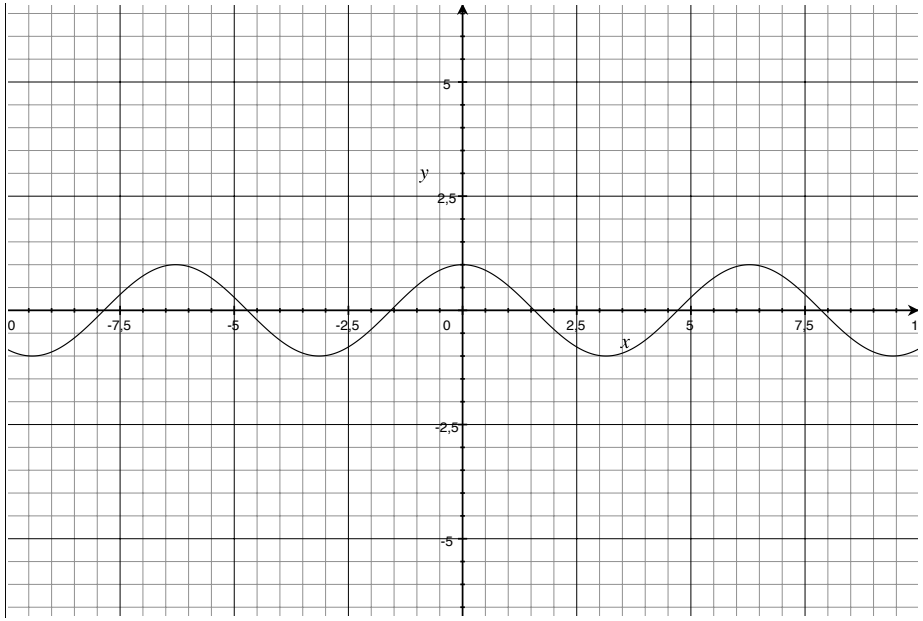
$\sin(x+2k\pi) = \sin x\,, \qquad \cos(x+2k\pi) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \forall k \in \mathbb{Z}$

cioè $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ sono $2\pi-$periodiche

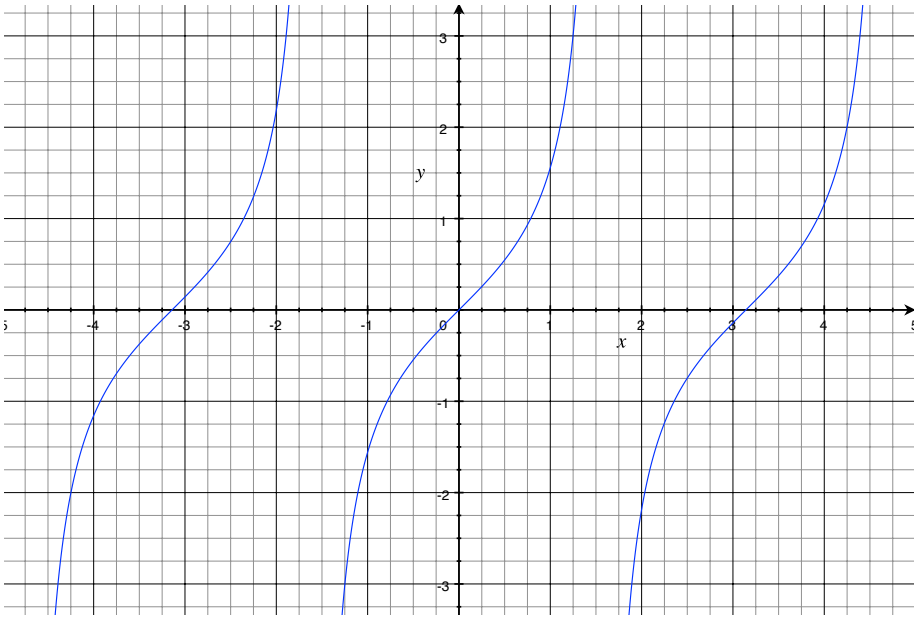
Il grafico di $f(x) = \sin x$ è:



Il grafico di $g(x) = \cos x$ è:

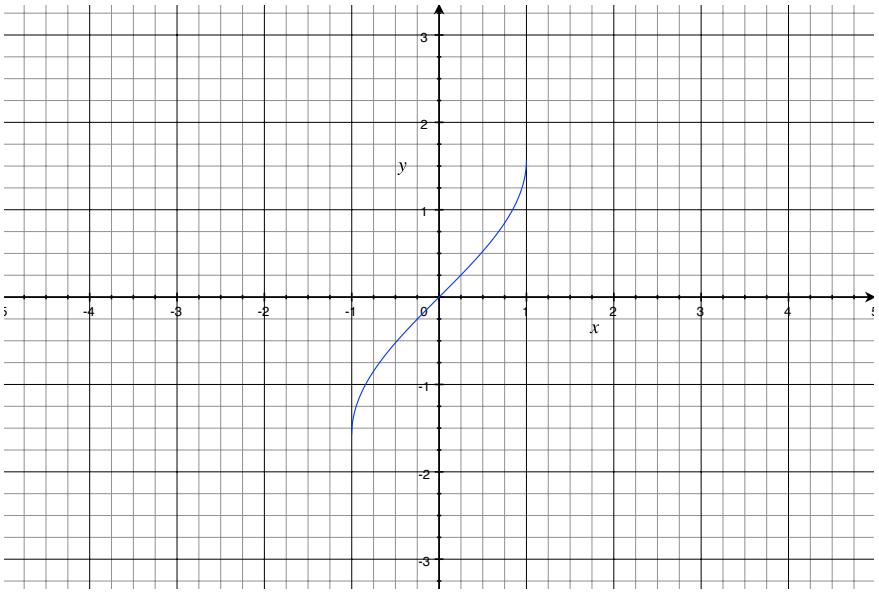


La funzione $f(x) = \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ è invece periodica di periodo π visto che $\sin(x+\pi) = -\sin x$ e $\cos(x+\pi) = -\cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il suo $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\}$. Il suo grafico è:



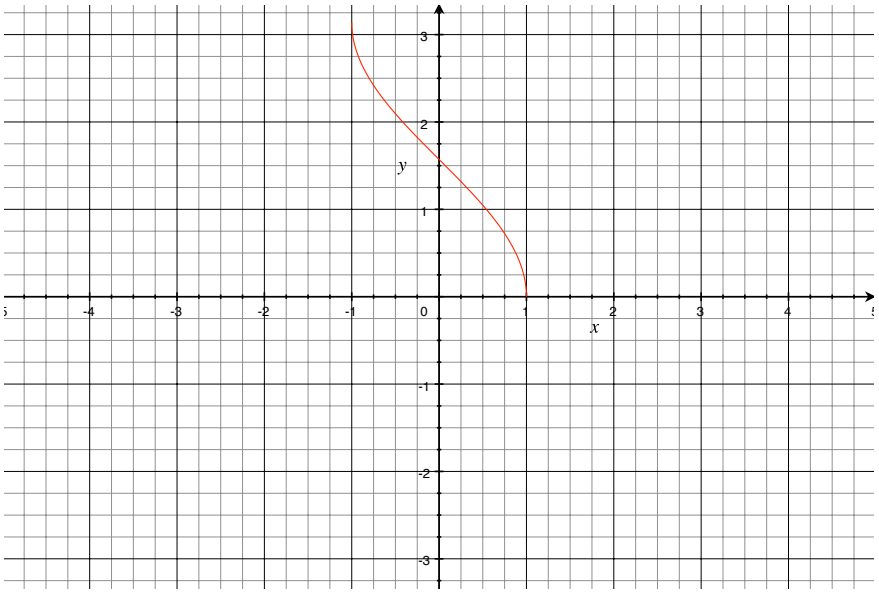
Funzione arcsin x

La funzione $f(x) = \sin x$ essendo periodica, non è iniettiva. Però la sua resrizione a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è strettamente crescente e dunque iniettiva. L'inversa di $f(x) = \sin x_{|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}}$ è la funzione $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Si ha $dom(\arcsin x) = [-1, 1]$ e $im(\arcsin x) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Inoltre $\arcsin x$ è strettamente crescente.



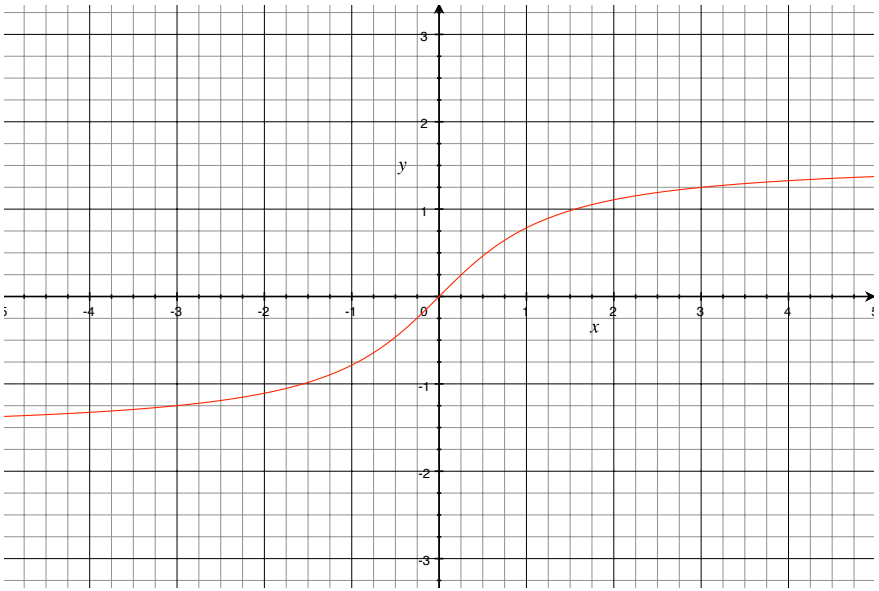
Funzione arccos x

La funzione $f(x) = \cos x$ essendo periodica, non è iniettiva. Però la sua resrizione a $[0, \pi]$ è strettamente decrescente e dunque iniettiva. L'inversa di $f(x) = \cos x_{|_{[0,\pi]}}$ è la funzione $f^{-1}(x) = \arccos x$. Si ha $dom(\arccos x) = [-1, 1]$ e $im(\arccos x) = [0, \pi]$. Inoltre $\arccos x$ è strettamente decrescente.



Funzione arctan x

La funzione $f(x) = \tan x$ essendo periodica, non è iniettiva. Però la sua resrizione a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è strettamente crescente e dunque iniettiva. L'inversa di $f(x) = \tan x_{|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}}$ è la funzione $f^{-1}(x) = \arctan x$. Si ha $dom(\arctan x) = \mathbb{R}$ e $im(\arctan x) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Inoltre $f^{-1}(x) = \arctan x$ è strettamente crescente come $f(x) = \tan x_{|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}}$.



Esercizio: Disegnare il grafico di $f(x) = \arcsin(\sin x)$

- Il dominio di f è $\mathbb{R}$, inoltre essendo $x \to \sin x$ $2\pi-$periodica, f è $2\pi-$ periodica
- Basta studiarla in un intervallo di lunghezza uguale a 2π. Scegliamo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$:
- È ovvio che $f(x) = x$ se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- se $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ allora $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e dunque $arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$
- essendo però anche vero che $\sin(\pi - x) = \sin x$ si ha che

$$f(x) = \pi - x \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

Perciò:

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

e poi prolungata per periodicità con periodo 2π

- Esercizio: Determinare il dominio naturale ed il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\log_{10}(\cos x)}$:
  si ha $dom(f) = \{x = 2k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\}$ e $f(2k\pi) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. (Essendo $\cos x \geq 1$ se e solo se $\cos x = 1$)
- Esercizio: Determinare il dominio naturale della funzione

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) - \log_{\frac{1}{4}}(4x - 3)$$

Deve essere

$$\begin{cases} 3x + 2 > 0 & \iff \quad x > -\frac{2}{3} \\ 4x - 3 > 0 & \iff \quad x > \frac{3}{4} \end{cases} \qquad \text{quindi } dom(g) = (\frac{3}{4}, +\infty)$$

e determinare $x \in dom(g)$ tali che $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} 5$:

osserviamo che, per le proprietà dei logaritmi, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x+2}{\sqrt{4x-3}}\right)$, quindi $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} 5$ se e solo se $\left(\frac{3x+2}{\sqrt{4x-3}}\right) = 5$ con $x > \frac{3}{4}$ e si ottengono le due soluzioni: $x = 1$ e $x = \frac{79}{9}$.

- Esercizio: Determinare il dominio naturale della funzione

$$f(x) = \arcsin(2x^2 - 16x + 31)$$

deve essere $|2x^2 - 16x + 31| \leq 1$ quindi $x \in [3, 5]$

Proprietà delle funzioni composte

Supponiamo di avere due funzioni f, g a valori reali e sia $A \subseteq dom(g \circ f)$ allora dimostrare che

- f crescente in A e g crescente in $f(A) \Rightarrow g \circ f$ crescente in A
- f decrescente in A e g decrescente in $f(A) \Rightarrow g \circ f$ crescente in A
- f crescente in A e g decrescente in $f(A) \Rightarrow g \circ f$ decrescente in A
- f decrescente in A e g crescente in $f(A) \Rightarrow g \circ f$ decrescente in A

composizione di funzioni iniettive:

- f iniettiva in A e g iniettiva in $f(A) \Rightarrow g \circ f$ iniettiva