Generalità - Insiemi numerici

Docente:Alessandra Cutrì

Informazioni corso

- Sito docente: http://www.mat.uniroma2.it/~cutri/
- Programma: vedi sito docente
- Testi consigliati: vedi sito docente

Orario Lezioni:

- Lunedi 11.30 - 13.15 Aula B4,
- Mercoledi 11,30 - 13,15 Aula C1,
- Giovedi 11,30 - 13,15 Aula B3
- 2 ore esercitazione a settimana con Dott. Ciolli (Giovedi ore 16,00-17,45 aula sarà comunicata sul sito)

Esame:

- prova scritta + prova orale (modalità su sito docente)

- Scopo del corso: Familiarizzazione con i concetti di base dell'analisi matematica e con il suo linguaggio necessari per la formulazione e lo studio di modelli matematici per la descrizione di fenomeni naturali e/o delle scienze applicate. Nel campo dell'ingegneria dell'Edilizia/Edile-Architettura l'Analisi Matematica ha contribuito all'evoluzione dei criteri di costruzione di edifici con l'introduzione di nuove forme "belle" ma anche obbedienti a criteri di "stabilità" oltre ad altri parametri che coinvolgono "costi" o in generale criteri di ottimizzazione.

Questo primo corso prenderà in considerazione soprattutto lo studio delle proprietà differenziali ed integrali per funzioni reali di una variabile reale

Alcuni Simboli matematici

Per formulare in modo conciso e corretto le definizioni o tesi matematiche vengono spesso usati simboli. Eccone alcuni:

- $\forall$ per ogni
- $\exists$ esiste (o esistono)
- $\exists!$ esiste uno ed uno solo (esiste ed è unico)
- $\Rightarrow$ implica
- $\Longleftrightarrow$ se e solo se
- $\in$ appartiene a
- $\notin$ non appartiene a
- $:$ (oppure $|$) tale che
- $\stackrel{def}{=}$ (oppure $:=$) definito da (uguale per definizione a)
- $\emptyset$ l'insieme vuoto (cioè privo di elementi)

Insieme (indicato in genere con lettere maiuscole $A, B, X, \dots$): concetto primitivo che indica una collezione o famiglia di oggetti chiamati elementi dell'insieme (indicati con lettere minuscole $a, b, c, x, y, \dots$)

Rappresentazione di un insieme come elenco: $A = \{a, b, d, x, z\}$

esempi:

- $A = \{1, 7, 4, 5, 3\}$,
- $A = \{7\}$,
- $A = \{Roma, Parigi, Londra, Praga, Lisbona\}$
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Insieme dei Numeri Naturali
- $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ Insieme dei Numeri Interi

(se l'insieme contiene infiniti elementi non è possibile elencarli tutti)

Rappresentazione di un insieme mediante predicati: affermazioni dipendenti da una o più variabili per definire un insieme:
Se $p(x)$ è un predicato che ha senso in A, allora

$$\{x \in A \,|\, p(x)\}$$

denota l'insieme degli elementi di A per i quali $p(x)$ è vera
esempi:

- $P := \{n \in \mathbb{N} \,|\; n \text{ è pari}\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari (che si può anche indicare con $P := \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$
- $D := \{n \in \mathbb{N} \,|\; n \text{ è dispari}\}$ è l'insieme dei numeri naturali dispari (che si può anche indicare con $D := \{2k + 1 \,:\, k \in \mathbb{N}\}$)
- $\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{Z} \,|\; k \geq 0\}$

- Inclusione tra insiemi A e B:

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$$

(si dice che A è un sottoinsieme di B)
Se $A \subseteq B$ e $A \neq B \quad \Rightarrow \quad A \subset B$

Oss:

- $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A.
- $A = B$ se gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi (altrimenti $A \neq B$)
- Se $A \neq \emptyset$ e $A \subset B$ si dice che A è un sottoinsieme proprio di B

Esempi:

- $\{5, 9, 7\} \subset \{3, 7, 5, 4, 9\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $P \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $D \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Dati due insiemi $A, B \subseteq U$ (U è l'insieme "ambiente") si possono costruire nuovi insiemi mediante operazioni insiemistiche:

- UNIONE ($A \cup B$):

$$A \cup B := \{x \in U \ : \ x \in A \text{ o } x \in B\}$$

  ("o" esprime alternativa e NON esclusione)
  Es: $P \cup D = \mathbb{N}$,
  $\{3, 7, 5, 4, 9\} \cup \{2, 7, 5, 6, 8\} = \{3, 7, 5, 4, 9, 2, 6, 8\}$

- INTERSEZIONE ($A \cap B$):

$$A \cap B := \{x \in U \ : \ x \in A \text{ e } x \in B\}$$

  (x deve stare sia in A che in B)

A e B si dicono DISGIUNTI se $A \cap B = \emptyset$
Es: $\{3, 7, 5, 4, 9\} \cap P = \{4\}$, $\{3, 7, 5, 4, 9\} \cap D = \{3, 7, 5, 9\}$,
$P \cap D = \emptyset$

Dati due insiemi $A, B \subseteq U$ (U è l'insieme "ambiente")

- DIFFERENZA di A da B: $(B \setminus A)$

$$B \setminus A := \{x \in B \, : \, x \notin A\}$$

- se $A \subseteq B$ allora $B \setminus A$ si chiama complementare di A rispetto a B e si indica con $\mathcal{C}_B A$ (oppure A^c quando $B = U$)

Valgono le leggi di De Morgan

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Dati due insiemi A, B (non necessariamente distinti) si chiama Prodotto Cartesiano

$$A \times B := \{(a, b) \,:\, a \in A\,, b \in B\}$$

dove (a, b) è una COPPIA ORDINATA formata nell'ordine dall'elemento $a \in A$ e $b \in B$ quindi:

$$(a, b) = (a', b') \quad \Longleftrightarrow \quad a = a' \quad e \quad b = b'$$

- Se $A \neq B$ allora $A \times B \neq B \times A$
- Se $A = B$ allora $A \times A =: A^2$

Esempi: $A = \{0, 1\}$, $B = \{3, 4, 7\}$ allora

$$A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (0, 7), (1, 3), (1, 4), (1, 7)\}$$

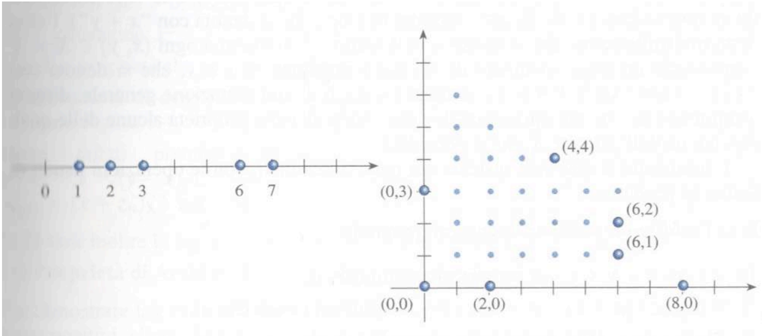
$$B \times A = \{(3, 0), (4, 0), (7, 0), (3, 1), (4, 1), (7, 1)\}$$

$$A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Il ragionamento si può iterare: dati N insiemi $A_1, A_2, \ldots A_N$ si chiama Prodotto Cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N := \{(a_1, a_2, \ldots, a_N) \, : \, a_i \in A_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N\}$$

Se gli insiemi A_i sono tutti uguali, il prodotto cartesiano si indica con A^N.
$(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ si chiama N-pla ordinata
Attenzione: $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ ma $(0, 1) \neq (1, 0)$
Rappresentazione geometrica di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{N}^2$:



Gli insiemi numerici sono quelli in cui sono definite due operazioni: Addizione e Moltiplicazione che godono di alcune proprietà
Esempi: $\mathbb{N}$ (insieme dei naturali), $\mathbb{Z}$ (insieme dei numeri interi), $\mathbb{Q}$ (insieme dei numeri razionali)

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}; \ q \neq 0\}$$

dove si identificano le frazioni $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \iff p \cdot s = r \cdot q$
$(\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 0,\overline{6})$
$\mathbb{Q}$ è un campo con addizione e moltiplicazione usuali:

- proprietà commutativa: $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- proprietà associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $\exists !$ elemento neutro: $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$)
- $\exists !$ inverso (opposto/risp. reciproco) :$x + (-x) = 0$, $x \cdot x^{-1} = 1$
- proprietà distributiva: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Si ha ovviamente $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
È definita in $\mathbb{Q}$ la relazione d'ordine $\leq$ usuale:

$$x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s} \quad \text{con } q, s \geq 0 \qquad x \leq y \iff ps \leq rq$$

in base alla quale $(\mathbb{Q}, \leq)$ è un campo totalmente ordinato
Esempio:

$$\frac{249}{16} \leq \frac{350}{21}?$$

Sì perché

$$249 \cdot 21 \leq 16 \cdot 350$$

Altra rappresentazione degli elementi di $\mathbb{Q}$: Allineamento decimale limitato o periodico (di periodo diverso da 9!):
Esempi:

$$\frac{249}{16} = 15,5625\,; \qquad \frac{350}{21} = 16,666666..... = 16,\overline{6}\,;$$

$$\frac{13}{27} = 0,481481... = 0,\overline{481}\,, \qquad \frac{125}{444} = 0,28\overline{153}$$

$$x = \pm p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots \qquad 0 \le \alpha_k \le 9 \qquad \forall k$$

Oss: $0,\overline{9} = 1$! Dipende dalla proprietà Archimedea

Se $x > 0$ allora

$$p,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n \leq x < p,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

Se $x < 0$ allora $x = -p,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots$ e si ha:

$$-p,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n - \frac{1}{10^n} < x \leq -p,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n$$

Esempio: $x = 3,57924869$ e scegliamo $n = 4$

$$3,5792 < x < 3,5792 + \frac{1}{10^4}$$

perché i termini che trascuriamo sono dell'ordine di 10^{-5}:

$$x - 3,5792 = 0,00004869 < 10^{-4}$$

Consideriamo una retta, fissiamo un origine O ed un unità di misura (basta posizionare sulla retta il punto $U = 1$ (a destra di O) e considerare come unità di misura la lunghezza del segmento $\overline{OU}$.
$\forall x \in \mathbb{Q}$ esiste un punto P sulla retta tale che

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= x \qquad \text{se } x > 0 \\ \overline{OP} &= -x \quad \text{se } x < 0 \end{aligned}$$

Quindi $\overline{OP} = |x|$ (Valore assoluto di x)
Viceversa, ogni punto della retta corrisponde ad un numero razionale? NO!!

Proprietà di densità dei numeri razionali:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \text{ tali che } x < y \ \exists \text{ infiniti } z \in \mathbb{Q} \text{ tali che } x < z < y$$

Dim: Prendiamo $z_1 = \frac{x+y}{2}$ (il punto medio tra x e y infatti: $y - z_1 = z_1 - x$). Si ha $x < z_1 < y$. Ora prendiamo $z_2 := \frac{x+z_1}{2}$ (il punto medio tra x e z_1).

$$x < z_2 < z_1 < y$$

Andiamo avanti e prendiamo

$$z_{n+1} := \frac{x + z_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Otteniamo:

$$x < \cdots < z_n < z_{n-1} < \cdots < z_2 < z_1 < y$$

ed abbiamo costruito gli infiniti (quanti sono i numeri naturali) numeri compresi tra x e y

Se si rappresentassero tutti i numeri razionali sulla retta euclidea (fissato un punto origine O ed una unità di misura 1) si ricoprirebbe tutta la retta?
Oss: $\forall x \in \mathbb{Q}$ esiste un punto P sulla retta tale che

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= x \qquad \text{se } x > 0 \\ \overline{OP} &= -x \quad \text{se } x < 0 \end{aligned}$$

Quindi $\overline{OP} = |x|$ (Valore assoluto di x)
Viceversa, ogni punto della retta corrisponde ad un numero razionale? NO!!
Non esiste alcun numero razionale che è uguale alla lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$