Generalità - Insiemi numerici- Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$

Docente:Alessandra Cutrì

Informazioni corso

- Sito docente: http://www.mat.uniroma2.it/~cutri/
- Programma: vedi sito docente
- Testi consigliati: vedi sito docente

Orario Lezioni:

- Lunedi 11.30 - 13.15 Aula B4,
- Mercoledi 11,30 - 13,15 Aula C1,
- Giovedi 11,30 - 13,15 Aula B3
- 2 ore esercitazione a settimana con Dott. Ciolli (Giovedi ore 16,00-17,45 aula sarà comunicata sul sito)

Esame:

- prova scritta + prova orale (modalità su sito docente)

Scopo del corso

- Scopo del corso: Familiarizzazione con i concetti di base dell'analisi matematica e con il suo linguaggio necessari per la formulazione e lo studio di modelli matematici per la descrizione di fenomeni naturali e/o delle scienze applicate. Nel campo dell'ingegneria dell'Edilizia/Edile-Architettura l'Analisi Matematica ha contribuito all'evoluzione dei criteri di costruzione di edifici con l'introduzione di nuove forme "belle" ma anche obbedienti a criteri di "stabilità" oltre ad altri parametri che coinvolgono "costi" o in generale criteri di ottimizzazione.

Questo primo corso prenderà in considerazione soprattutto lo studio delle proprietà differenziali ed integrali per funzioni reali di una variabile reale

Alcuni Simboli matematici

Per formulare in modo conciso e corretto le definizioni o tesi matematiche vengono spesso usati simboli. Eccone alcuni:

- $\forall$ per ogni
- $\exists$ esiste (o esistono)
- $\exists!$ esiste uno ed uno solo (esiste ed è unico)
- $\Rightarrow$ implica
- $\Longleftrightarrow$ se e solo se
- $\in$ appartiene a
- $\notin$ non appartiene a
- $:$ (oppure $|$) tale che
- $\stackrel{def}{=}$ (oppure $:=$) definito da (uguale per definizione a)
- $\emptyset$ l'insieme vuoto (cioè privo di elementi)

Richiami di insiemistica

Insieme (indicato in genere con lettere maiuscole $A, B, X, \dots$): concetto primitivo che indica una collezione o famiglia di oggetti chiamati elementi dell'insieme (indicati con lettere minuscole $a, b, c, x, y, \dots$)
Rappresentazione di un insieme come elenco: $A = \{a, b, d, x, z\}$
esempi:

- $A = \{1, 7, 4, 5, 3\}$,
- $A = \{7\}$,
- $A = \{Roma, Parigi, Londra, Praga, Lisbona\}$
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Insieme dei Numeri Naturali
- $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ Insieme dei Numeri Interi

(se l'insieme contiene infiniti elementi non è possibile elencarli tutti)

Rappresentazione di un insieme mediante predicati: affermazioni dipendenti da una o più variabili per definire un insieme:
Se $p(x)$ è un predicato che ha senso in A, allora

$$\{x \in A \,|\, p(x)\}$$

denota l'insieme degli elementi di A per i quali $p(x)$ è vera
esempi:

- $P := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ è pari}\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari (che si può anche indicare con $P := \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$
- $D := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ è dispari}\}$ è l'insieme dei numeri naturali dispari (che si può anche indicare con $D := \{2k+1 \,:\, k \in \mathbb{N}\}$)
- $\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \geq 0\}$

- Inclusione tra insiemi A e B:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

(si dice che A è un sottoinsieme di B)
Se $A \subseteq B$ e $A \neq B \Rightarrow A \subset B$

Oss:

- $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A.
- $A = B$ se gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi (altrimenti $A \neq B$)
- Se $A \neq \emptyset$ e $A \subset B$ si dice che A è un sottoinsieme proprio di B

Esempi:

- $\{5, 9, 7\} \subset \{3, 7, 5, 4, 9\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $P \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $D \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Dati due insiemi $A, B \subseteq U$ (U è l'insieme "ambiente") si possono costruire nuovi insiemi mediante operazioni insiemistiche:

- UNIONE ($A \cup B$):

$$A \cup B := \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

("o" esprime alternativa e NON esclusione)
Es: $P \cup D = \mathbb{N}$,
$\{3, 7, 5, 4, 9\} \cup \{2, 7, 5, 6, 8\} = \{3, 7, 5, 4, 9, 2, 6, 8\}$

- INTERSEZIONE ($A \cap B$):

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

(x deve stare sia in A che in B)

A e B si dicono DISGIUNTI se $A \cap B = \emptyset$
Es: $\{3, 7, 5, 4, 9\} \cap P = \{4\}$, $\{3, 7, 5, 4, 9\} \cap D = \{3, 7, 5, 9\}$,
$P \cap D = \emptyset$

Dati due insiemi $A, B \subseteq U$ (U è l'insieme "ambiente")

- DIFFERENZA di A da B: $(B \setminus A)$

$$B \setminus A := \{x \in B \, : \, x \notin A\}$$

- se $A \subseteq B$ allora $B \setminus A$ si chiama complementare di A rispetto a B e si indica con $\mathcal{C}_B A$ (oppure A^c quando $B = U$)

Valgono le leggi di De Morgan

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Dati due insiemi A, B (non necessariamente distinti) si chiama Prodotto Cartesiano

$$A \times B := \{(a, b) \ : \ a \in A \, , b \in B\}$$

dove (a, b) è una COPPIA ORDINATA formata nell'ordine dall'elemento $a \in A$ e $b \in B$ quindi:

$$(a, b) = (a', b') \quad \Longleftrightarrow \quad a = a' \quad e \quad b = b'$$

- Se $A \neq B$ allora $A \times B \neq B \times A$
- Se $A = B$ allora $A \times A =: A^2$

Esempi: $A = \{0, 1\}$, $B = \{3, 4, 7\}$ allora

$$A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (0, 7), (1, 3), (1, 4), (1, 7)\}$$

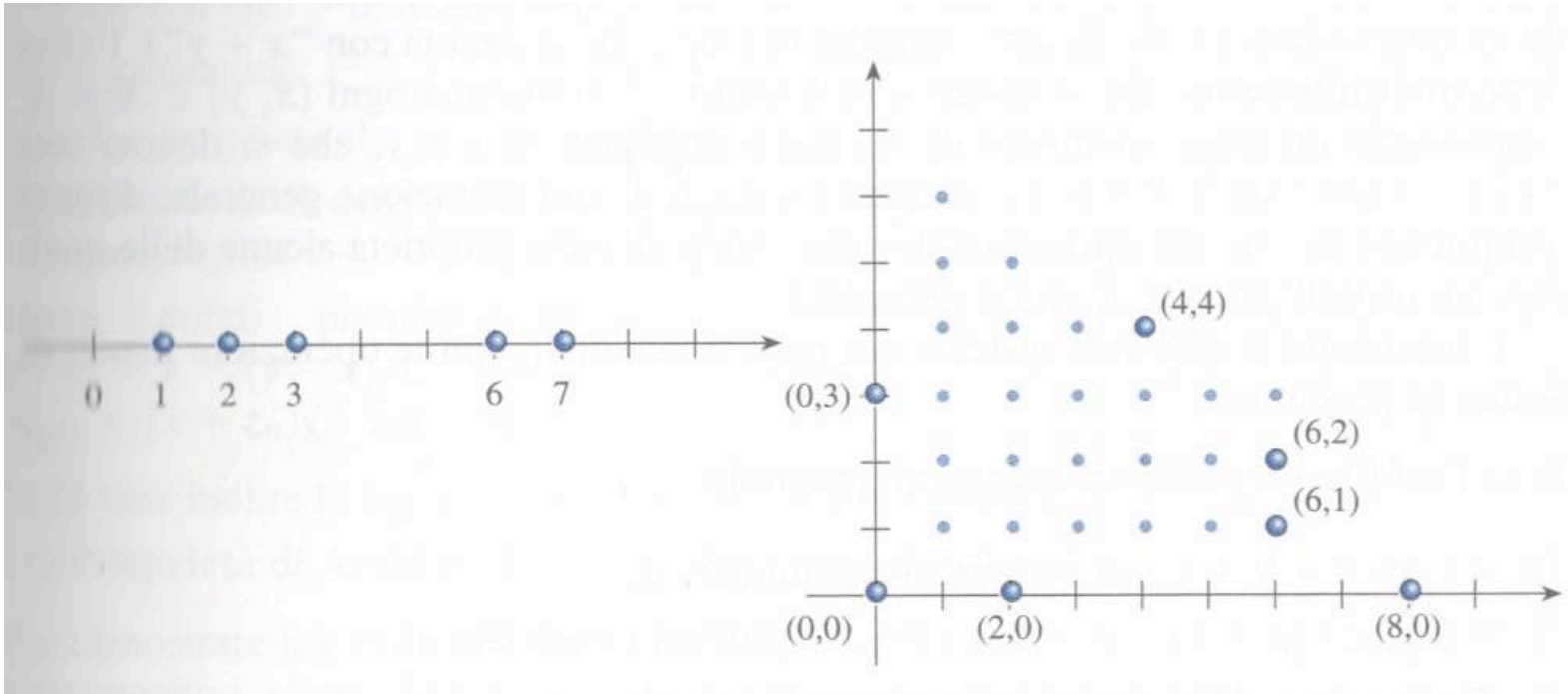
$$B \times A = \{(3, 0), (4, 0), (7, 0), (3, 1), (4, 1), (7, 1)\}$$

$$A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Il ragionamento si può iterare: dati N insiemi $A_1, A_2, \dots A_N$ si chiama Prodotto Cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N := \{(a_1, a_2, \dots, a_N) : a_i \in A_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N\}$$

Se gli insiemi A_i sono tutti uguali, il prodotto cartesiano si indica con A^N.
$(a_1, a_2, \dots, a_N)$ si chiama N-pla ordinata
Attenzione: $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ ma $(0, 1) \neq (1, 0)$
Rappresentazione geometrica di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{N}^2$:



Insiemi Numerici

Gli insiemi numerici sono quelli in cui sono definite due operazioni: Addizione e Moltiplicazione che godono di alcune proprietà
Esempi: $\mathbb{N}$ (insieme dei naturali), $\mathbb{Z}$ (insieme dei numeri interi), $\mathbb{Q}$ (insieme dei numeri razionali)

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}\,;\, q \neq 0\}$$

dove si identificano le frazioni $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \iff p \cdot s = r \cdot q$
$(\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 0,\overline{6})$
$\mathbb{Q}$ è un campo con addizione e moltiplicazione usuali:

- proprietà commutativa: $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- proprietà associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $\exists!$ elemento neutro: $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$)
- $\exists!$ inverso (opposto/risp. reciproco) :$x + (-x) = 0$, $x \cdot x^{-1} = 1$
- proprietà distributiva: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Si ha ovviamente $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
È definita in $\mathbb{Q}$ la relazione d'ordine $\leq$ usuale:

$$x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s} \quad \text{con } q, s \geq 0 \qquad x \leq y \iff ps \leq rq$$

in base alla quale $(\mathbb{Q}, \leq)$ è un campo totalmente ordinato
Esempio:

$$\frac{249}{16} \leq \frac{350}{21}?$$

Sì perché

$$249 \cdot 21 \leq 16 \cdot 350$$

Rappresentazione decimale di $\mathbb{Q}$

Altra rappresentazione degli elementi di $\mathbb{Q}$: Allineamento decimale limitato o periodico (di periodo diverso da 9!):
Esempi:

$$\frac{249}{16} = 15,5625\,; \qquad \frac{350}{21} = 16,666666..... = 16,\overline{6}\,;$$

$$\frac{13}{27} = 0,481481... = 0,\overline{481}\,, \qquad \frac{125}{444} = 0,28\overline{153}$$

$$x = \pm p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots \qquad 0 \leq \alpha_k \leq 9 \qquad \forall k$$

Oss: $0,\overline{9} = 1$! Dipende dalla proprietà Archimedea

Se $x > 0$ allora

$$p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \leq x < p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

Se $x < 0$ allora $x = -p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$ e si ha:

$$-p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n - \frac{1}{10^n} < x \leq -p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n$$

Esempio: $x = 3,57924869$ e scegliamo $n = 4$

$$3,5792 < x < 3,5792 + \frac{1}{10^4}$$

perché i termini che trascuriamo sono dell'ordine di 10^{-5}:

$$x - 3,5792 = 0,00004869 < 10^{-4}$$

Rappresentazione geometrica dei numeri razionali

Consideriamo una retta, fissiamo un origine O ed un unità di misura (basta posizionare sulla retta il punto $U = 1$ (a destra di O) e considerare come unità di misura la lunghezza del segmento $\overline{OU}$.
$\forall x \in \mathbb{Q}$ esiste un punto P sulla retta tale che

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= x \qquad \text{se } x > 0 \\ \overline{OP} &= -x \qquad \text{se } x < 0 \end{aligned}$$

Quindi $\overline{OP} = |x|$ (Valore assoluto di x)
Viceversa, ogni punto della retta corrisponde ad un numero razionale? NO!!

Densità dei numeri razionali

Proprietà di densità dei numeri razionali:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \text{ tali che } x < y \ \exists \text{ infiniti } z \in \mathbb{Q} \text{ tali che } x < z < y$$

Dim: Prendiamo $z_1 = \frac{x+y}{2}$ (il punto medio tra x e y infatti: $y - z_1 = z_1 - x$). Si ha $x < z_1 < y$. Ora prendiamo $z_2 := \frac{x+z_1}{2}$ (il punto medio tra x e z_1).

$$x < z_2 < z_1 < y$$

Andiamo avanti e prendiamo

$$z_{n+1} := \frac{x + z_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Otteniamo:

$$x < \cdots < z_n < z_{n-1} < \cdots < z_2 < z_1 < y$$

ed abbiamo costruito gli infiniti (quanti sono i numeri naturali) numeri compresi tra x e y

Se si rappresentassero tutti i numeri razionali sulla retta euclidea (fissato un punto origine O ed una unità di misura 1) si ricoprirebbe tutta la retta?
Oss: $\forall x \in \mathbb{Q}$ esiste un punto P sulla retta tale che

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= x \qquad \text{se } x > 0 \\ \overline{OP} &= -x \qquad \text{se } x < 0 \end{aligned}$$

Quindi $\overline{OP} = |x|$ (Valore assoluto di x)
Viceversa, ogni punto della retta corrisponde ad un numero razionale? NO!!
Non esiste alcun numero razionale che è uguale alla lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Proprietà di Archimede di $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ soddisfa la Proprietà di Archimede:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad x, y > 0\,, \qquad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n \cdot x \geq y$$

Infatti:
se $x = \frac{p}{q}$ con $p, q > 0$ e $y = \frac{r}{s}$ con $r, s > 0$, scegliendo $n := q \cdot r$ si ha:

$$n \cdot x = q \cdot r \frac{p}{q} = r \cdot p \geq r \geq \frac{r}{s} \qquad \text{poiché } p, s \geq 1$$

Conseguenze:

- Prendendo $y = 1$:

$$\forall x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x \geq \frac{1}{n}$$

- Essendo $10^n > n$,

$$\forall x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x > \frac{1}{10^n}$$

- $0,\overline{9} = 1$: Infatti, se per assurdo fosse $1 - 0,\overline{9} > 0$, esisterebbe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - 0,\overline{9} > \frac{1}{10^{\overline{n}}}$$

mentre si ha

$$1 - 0,\overline{9} = 0,00000\cdots < \frac{1}{10^{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione per assurdo

Vediamo come dimostrare che

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

. Primo esempio di DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO:

- Si suppone per assurdo che la tesi sia falsa
- Si procede con deduzioni logiche dal passo precedente
- Si arriva ad una contraddizione

Questo dimostra che la tesi non può essere falsa e dunque è VERA

Dimostrazione per assurdo:

- Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, cioè che esista $x > 0$, $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.
- Allora $x = \frac{p}{q}$ per qualche $p, q \in \mathbb{N}$ con $q \neq 0$.
- Possiamo assumere p, q primi tra loro (cioè non divisibili per uno stesso intero maggiore di 1 o equivalentemente senza divisori comuni)
- Quindi $p^2 = 2q^2$ perciò p^2 è un numero pari e da questo segue che p è un numero pari e si può dunque indicare con $p = 2m$ per qualche $m \in \mathbb{N}$
- Allora $q^2 = \frac{p^2}{2} = 2m^2$ perciò q^2 è pari e quindi q è pari
- Arrivati alla contraddizione: p e q entrambi pari. Contraddizione perché avevamo scelto p e q primi tra loro

Esercizi

- Provare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (per casa)
- Anche $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$. Infatti, supponiamo per assurdo che $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ $q \neq 0$, primi tra loro.

  Allora $2^{\frac{p}{q}} = 3 \Rightarrow 2^p = 3^q$. Questo è assurdo poiché 2^p è pari mentre 3^q è dispari. La contraddizione implica che $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$.
- Provare che $\log_3 2 \notin \mathbb{Q}$ (per casa)

dove sta $\sqrt{2}$?

$$\sqrt{2} = x \Leftrightarrow x^2 = 2$$

Quindi, essendo

- $1^2 = 1 < 2$ e $2^2 = 4 > 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{2} < 2$
- $(1,4)^2 = 1,96 < 2 \quad e \quad (1,5)^2 = 2,25 > 2 \Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
- $(1,41)^2 = 1,9881 < 2 \quad e \quad (1,42)^2 = 2,0164 > 2 \Rightarrow$ $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
- andando avanti si prova che $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$
- si determinano così i primi numeri decimali

$$1,414213562\ldots$$

Definizione: $\sqrt{2}$ è l'unico allineamento decimale $1,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ tale che

$$(1,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2 < 2 < (1,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n})^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sqrt{2}$ è un allineamento decimale illimitato aperiodico

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali

Un numero reale è un allineamento decimale proprio, cioè

- finito o periodico con periodo diverso da 9 (numero razionale $\in \mathbb{Q}$)
- illimitato aperiodico (numero irrazionale)

Oss: $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale

$\mathbb{R}$ è un insieme numerico (con le usuali operazioni di somma e prodotto) ordinato (con la relazione di ordine usuale)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un CAMPO TOTALMENTE ORDINATO

Inoltre vale la proprietà Archimedea e la densità di $\mathbb{Q}$ (e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) in $\mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x < y) \quad \exists \quad \text{infiniti } z \in \mathbb{Q} \quad \text{tali che } x < z < y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x < y) \quad \exists \quad \text{infiniti } z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{tali che } x < z < y$$

Completezza di $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali possiede in più rispetto a $\mathbb{Q}$ la Proprietà di COMPLETEZZA. Per definirla dobbiamo prima introdurre alcuni concetti:
Definizione di Maggiorante e Minorante: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.
Un elemento $k \in \mathbb{R}$ si chiama Maggiorante per A se

$$\forall x \in A \qquad \text{risulta } x \leq k$$

Un elemento $h \in \mathbb{R}$ si chiama Minorante per A se

$$\forall x \in A \qquad \text{risulta } x \geq h$$

Se A possiede almeno un maggiorante $\Rightarrow$ A si dice limitato Superiormente
Se A possiede almeno un minorante $\Rightarrow$ A si dice limitato inferiormente
L'insieme A si dice limitato $\Leftrightarrow$ A è limitato sia superiormente che inferiormente

Un maggiorante appartenente ad A si chiama Massimo e si indica con $\max A$

Un minorante appartenente ad A si chiama Minimo e si indica con $\min A$

Oss: Se A è limitato superiormente ha infiniti maggioranti ma se ammette massimo, questo è UNICO (analogamente, se A è limitato inferiormente, ha infiniti minoranti ma se ammette minimo, questo è UNICO)

Esempio 1:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = [1, 2]$ (intervallo chiuso di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A?ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente) inoltre $h = 1 \in A$ ed è dunque $\min A = 1$

Un maggiorante appartenente ad A si chiama Massimo e si indica con $\max A$

Un minorante appartenente ad A si chiama Minimo e si indica con $\min A$

Oss: Se A è limitato superiormente ha infiniti maggioranti ma se ammette massimo, questo è UNICO (analogamente, se A è limitato inferiormente, ha infiniti minoranti ma se ammette minimo, questo è UNICO)

Esempio 1:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = [1, 2]$ (intervallo chiuso di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente) inoltre $h = 1 \in A$ ed è dunque $\min A = 1$

Un maggiorante appartenente ad A si chiama Massimo e si indica con $\max A$

Un minorante appartenente ad A si chiama Minimo e si indica con $\min A$

Oss: Se A è limitato superiormente ha infiniti maggioranti ma se ammette massimo, questo è UNICO (analogamente, se A è limitato inferiormente, ha infiniti minoranti ma se ammette minimo, questo è UNICO)

Esempio 1:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = [1, 2]$ (intervallo chiuso di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A?ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente) inoltre $h = 1 \in A$ ed è dunque $\min A = 1$

Esempio 2:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2]$ (intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). Questa volta $h = 1 \notin A$ ed è il più grande dei minoranti. Qui il $\min A$ NON ESISTE

Esempio 3:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2)$ (intervallo aperto di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \notin A$ è il più piccolo dei maggioranti. Qui il $\max A$ NON ESISTE
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). $h = 1 \notin A$ quindi $\nexists \min A$

Esempio 2:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2]$ (intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). Questa volta $h = 1 \notin A$ ed è il più grande dei minoranti. Qui il $\min A$ NON ESISTE

Esempio 3:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2)$ (intervallo aperto di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \notin A$ è il più piccolo dei maggioranti. Qui il $\max A$ NON ESISTE
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). $h = 1 \notin A$ quindi $\exists \min A$

Esempio 2:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2]$ (intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). Questa volta $h = 1 \notin A$ ed è il più grande dei minoranti. Qui il $\min A$ NON ESISTE

Esempio 3:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2)$ (intervallo aperto di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \notin A$ è il più piccolo dei maggioranti. Qui il $\max A$ NON ESISTE
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). $h = 1 \notin A$ quindi $\nexists \min A$

Esempio 2:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2]$ (intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). Questa volta $h = 1 \notin A$ ed è il più grande dei minoranti. Qui il $\min A$ NON ESISTE

Esempio 3:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2)$ (intervallo aperto di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \notin A$ è il più piccolo dei maggioranti. Qui il $\max A$ NON ESISTE
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). $h = 1 \notin A$ quindi $\nexists \min A$

Esempio 2:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2]$ (intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \in A$ ed è dunque $\max A = 2$
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). Questa volta $h = 1 \notin A$ ed è il più grande dei minoranti. Qui il $\min A$ NON ESISTE

Esempio 3:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} \subset \mathbb{R}$$

si indica anche con $A = (1, 2)$ (intervallo aperto di estremi 1 e 2)

- quali sono i maggioranti di A? ogni numero reale $k \geq 2$ (A è limitato superiormente) inoltre $k = 2 \notin A$ è il più piccolo dei maggioranti. Qui il $\max A$ NON ESISTE
- quali sono i minoranti di A? ogni numero reale $h \leq 1$ (A è limitato inferiormente). $h = 1 \notin A$ quindi $\nexists \min A$

Oss: se $\min A$ esiste, allora è unico

Infatti supponiamo per assurdo $m_1 = \min A$, $m_2 = \min A$, $m_1 \neq m_2$.

- m_1 è un minorante e $m_2 \in A$, $\Rightarrow m_1 \leq m_2$.
- m_2 è un minorante e $m_1 \in A$, $\Rightarrow m_2 \leq m_1$.

$\Rightarrow m_1 \leq m_2 \leq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2$ contro l'ipotesi.

Oss: se $\max A$ esiste, allora è unico

(si dimostra in modo analogo)

Oss: Se $A \neq \emptyset$ è un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi), allora esiste $\max A$ e $\min A$

Esempio: $A = \{3, 4, 1, 5, 2\}$, $\max A = 5$, e $\min A = 1$

Oss: se $\min A$ esiste, allora è unico

Infatti supponiamo per assurdo $m_1 = \min A$, $m_2 = \min A$, $m_1 \neq m_2$.

- m_1 è un minorante e $m_2 \in A$, $\Rightarrow m_1 \leq m_2$.
- m_2 è un minorante e $m_1 \in A$, $\Rightarrow m_2 \leq m_1$.

$\Rightarrow m_1 \leq m_2 \leq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2$ contro l'ipotesi.

Oss: se $\max A$ esiste, allora è unico

(si dimostra in modo analogo)

Oss: Se $A \neq \emptyset$ è un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi), allora esiste $\max A$ e $\min A$

Esempio: $A = \{3, 4, 1, 5, 2\}$, $\max A = 5$, e $\min A = 1$

Oss: se $\min A$ esiste, allora è unico

Infatti supponiamo per assurdo $m_1 = \min A$, $m_2 = \min A$, $m_1 \neq m_2$.

- m_1 è un minorante e $m_2 \in A$, $\Rightarrow m_1 \leq m_2$.
- m_2 è un minorante e $m_1 \in A$, $\Rightarrow m_2 \leq m_1$.

$\Rightarrow m_1 \leq m_2 \leq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2$ contro l'ipotesi.

Oss: se $\max A$ esiste, allora è unico

(si dimostra in modo analogo)

Oss: Se $A \neq \emptyset$ è un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi), allora esiste $\max A$ e $\min A$

Esempio: $A = \{3, 4, 1, 5, 2\}$, $\max A = 5$, e $\min A = 1$

Intervalli limitati

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, allora indichiamo con

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a<x<b\}$; (intervallo aperto)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a\leq x<b\}$; (intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a<x\leq b\}$; (intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra)
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a\leq x\leq b\}$; (intervallo chiuso)

Intervalli illimitati

Sia $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con:

- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$;
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$;
- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$;
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$;
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$
- $\mathbb{R}^- := (-\infty, 0)$

Estremo superiore e inferiore

Abbiamo visto negli esempi precedenti che il più piccolo dei maggioranti di $A \subset \mathbb{R}$, limitato superiormente, (rispettivamente il più grande dei minoranti di $A \subset \mathbb{R}$, limitato inferiormente) può o meno appartenere all'insieme. Se appartiene all'insieme si chiama $\max A$ (rispettivamente $\min A$), se non appartiene? Si chiama estremo superiore di A (rispettivamente estremo inferiore di A):

- $\sup A := \min\{k \in \mathbb{R} \mid k \text{ è maggiorante di } A\}$
- $\inf A := \max\{h \in \mathbb{R} \mid h \text{ è minorante di } A\}$

Vediamo delle proprietà facili di $\sup A$ e $\inf A$:

- Oss: Se esiste $\sup A$ questo è unico (perché è il minimo di un insieme)
- Oss: Se esiste $\inf A$ questo è unico (perché è il massimo di un insieme)
- Oss: Se esiste $\sup A \in A$, allora esiste $\max A$ e $\max A = \sup A$ (analogamente per $\inf A$ e $\min A$)
- se esiste $\max A$ allora $\sup A = \max A$

Nell' esempio 1:

$$A = [1, 2]$$

si ha $\sup A = \max A = 2$ e $\inf A = \min A = 1$.

Nell'esempio 2:

$$A = (1, 2]$$

si ha $\sup A = \max A = 2$ e $\inf A = 1$, ma il $\min A$ non esiste perché $1 \notin A$.

Nell'esempio 3:

$$A = (1, 2)$$

si ha $\sup A = 2$ e $\inf A = 1$, ma $\max A$ e $\min A$ non esistono perché $1 \notin A$ e $2 \notin A$.

Notazione:
Se $A \subset \mathbb{R}$ NON è limitato superiormente (cioè non ha maggioranti) si scrive $\sup A = +\infty$
Se $A \subset \mathbb{R}$ NON è limitato inferiormente (cioè non ha minoranti) si scrive $\inf A = -\infty$
Per esempio: $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 3\} = (-\infty, 3]$ ha $\inf A = -\infty$, $\sup A = \max A = 3$

Se ci limitiamo a sottoinsiemi dei numeri razionali ed andiamo a cercare lì questi due elementi, non è detto che esistano. Per esempio:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$$

ha come maggioranti tutti i numeri razionali $q > \sqrt{2}$, ma non esiste in $\mathbb{Q}$ il sup A (il candidato sarebbe $\sqrt{2}$ che non possiamo prendere perché $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Questo non succede più se consideriamo $A \subset \mathbb{R}$! (oss: $A = [0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$). In tal caso $\sup A = \sqrt{2}$!

Proprietà di Completezza di $\mathbb{R}$

Teorema (proprietà di completezza):
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se A è limitato superiormente allora esiste $\sup A \in \mathbb{R}$ (se A è limitato inferiormente allora esiste $\inf A \in \mathbb{R}$)

- Dal punto di vista geometrico questo significa che ad ogni punto della retta reale corrisponde un numero reale! Cioè $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta
- In $\mathbb{Q}$ la proprietà di completezza non vale (cfr. es. precedente)

Caratterizzazione di estremo superiore

Abbiamo visto che se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- $\sup A := \min\{k \in \mathbb{R} \mid k \text{ è maggiorante di } A\}$

Cosa significa?

1. $\sup A$ è maggiorante di A. Quindi

$$\forall x \in A \quad x \leq \sup A$$

2. $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti. Quindi ogni numero più piccolo di $\sup A$ non è maggiorante. Cioè:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_\epsilon \in A \quad | \quad x_\epsilon > \sup A - \epsilon$$

Caratterizzazione di estremo inferiore

Abbiamo visto che se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- $\inf A := \max\{h \in \mathbb{R} \mid h \text{ è minorante di } A\}$

Cosa significa?

1. $\inf A$ è minorante di A. Quindi

$$\forall x \in A \quad x \geq \inf A$$

2. $\inf A$ è il più grande dei minoranti. Quindi ogni numero più grande di $\inf A$ non è minorante. Cioè:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_\epsilon \in A \quad | \quad x_\epsilon < \inf A + \epsilon$$

Esercizi

Esercizio 1: Determinare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi (specificando se si tratta di max o min):

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x^2 - x - 6)(x - 4) > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x^2 - x - 6)(x - 4) \leq 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \,|\, \frac{x - 3}{x + 4} \leq 2\}$$