Serie Numeriche

Docente:Alessandra Cutrì

Definizione di Serie

Somma formale di un numero infinito di addendi.
È un' operazione che è in stretta relazione con quella di integrale improprio.

- data un successione numerica $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k \in \mathbb{R}$ vogliamo dare significato all'operazione di

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

- a partire da $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ costruiamo un'altra successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \qquad \text{successione delle somme parziali} \end{aligned}$$

o anche s_n: ridotta n-ma della serie

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice semplicemente convergente se e solo se

$$\exists \quad \text{finito} \quad \lim_{n\to+\infty} s_n = S \qquad \text{Somma della serie}$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

la serie si dice diverente (o irregolare) se la successione s_n è divergente (rispett. irregolare)

OSS: spesso invece di partire da zero nella serie, si parte da $N_0 \in \mathbb{N}$, è evidente che il carattere della serie non cambia, ma il valore della somma S dipende da N_0

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{N_0-1})$$

- Si chiama resto $n - mo$ della serie

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = s_n + R_n$$

se la serie converge, è evidente che

$$R_n = S - s_n \to 0 \qquad \text{poiché } s_n \to S$$

- si potrebbe pensare alla serie come ad una successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e applicare a $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la teoria svolta sulle successioni ma spesso non è possibile determinare esplicitamente s_n e questo non consente l'applicazione diretta della teoria dei limiti di successioni ma occorrono dei criteri di convergenza ad hoc per lo studio della particolare successione $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e per individuare il suo limite (cioè la somma S)

Serie di Mengoli: esempio di serie telescopica – formula esplicita per s_n

Serie telescopiche:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k - b_{k+1}$$

Si può determinare esplicitamente s_n e applicare la teoria dei limiti di successioni per calcolare la somma. Infatti,

$$s_n = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad s_n \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad b_n \text{ converge e } \quad S = b_0 - \lim b_n$$

Esempio: Serie di Mengoli:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 \qquad \text{infatti:}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Serie geometrica: formula esplicita per s_n

Un'altra serie per cui si può determinare esplicitamente s_n è la serie geometrica di ragione q:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

In tal caso s_n è la progressione geometrica di ragione q

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \to \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ +\infty & q \geq 1 \\ \text{non converge (è irregolare)} & q \leq -1 \end{cases}$$

Perciò la serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$ ed in tal caso la somma $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

- $$\sum_{k=N_0}^{\infty} q^k = \frac{q^{N_0}}{1-q} \qquad \text{se } |q| < 1$$

  (si parte da $N_0 > 0$): Infatti il carattere della serie rimane lo stesso ma la somma no, visto che si modificano i primi addendi e dunque la ridotta s_n che diventa, per $n > N_0$,

$$\begin{aligned} s_n = q^{N_0} +^{N_0+1} + \cdots + q^n &= q^{N_0}[1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-N_0}] \\ &= q^{N_0}[\tfrac{1-q^{n-N_0+1}}{1-q}] \to \tfrac{q^{N_0}}{1-q} \end{aligned}$$

In generale non si riesce ad esplicitare s_n ed allora servono criteri ad hoc per le serie.

Theorem

Condizione Necessaria perché la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sia convergente, è che:*

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

Dim: Poiché la serie converge, $s_n \to S$ quando $n \to +\infty$. Essendo $s_n = s_{n-1} + a_n$ dal fatto che $s_n \to S$ e $s_{n-1} \to S$, segue che $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$.

- la condizione non è sufficiente:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \qquad k \to +\infty \qquad \text{ma} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \qquad k \to +\infty \qquad \text{ma} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$$

Infatti:

$$\begin{aligned} s_n = & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty \end{aligned}$$

(stima di s_n)

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = +\infty$$

  la divergenza dell'integrale improprio e della serie sono tra loro collegati

Condizione necessaria e sufficiente per convergenza della serie:Criterio di Cauchy

Alla successione delle ridotte n-me s_n si può applicare il criterio di Cauchy che si esplicita così:

Theorem

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente se e solo se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \textit{ tale che } \forall m > N \textit{ e } \forall p \geq 0 \quad (m, p \in \mathbb{N})$$

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \epsilon$$

Dim: Si applica il criterio di Cauchy alla successione s_n che converge se e solo se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tale che } \forall m > N \text{ e } p \geq 0 \quad (m, p \in \mathbb{N})$$

$$|s_{m+p} - s_m| < \epsilon \qquad \text{cioè} \qquad |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \epsilon$$

La serie armonica è divergente

Spesso il criterio di Cauchy è utile per provare la non convergenza di una serie. Consideriamo la serie armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

La condizione necessaria per la convergenza della serie è soddisfatta poiché $\frac{1}{k} \to 0$ per $k \to +\infty$. Ma consideriamo

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

perciò per n grande se scegliamo $\epsilon = \frac{1}{2}$ nel criterio di Cauchy e $m = p = n$ il criterio non è soddisfatto e dunque la serie armonica non converge. Essendo $a_k = \frac{1}{k} > 0$, la successione s_n è monotona crescente e dunque, visto che la serie non converge, $s_n \to +\infty$.

- osserviamo che anche

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

Anche in questo caso l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ e la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hanno lo stesso andamento. Vediamo un criterio (criterio Integrale) che stabilisce un legame tra convergenza o meno di serie e di integrali impropri. Fornisce una condizione necessaria e sufficiente ma si riferisce a serie a termini non negativi di tipo particolare (quindi è meno generale di quello di Cauchy): $a_k = f(k)$ con $f \geq 0$ e definitivamente decrescente.

Consideriamo ora serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{con } a_k \geq 0$$

(è sufficiente che $a_k \geq 0$ definitivamente per $k \to +\infty$). In tal caso

- s_n è monotona non decrescente poiché $s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$

Quindi la serie converge se e solo se s_n è limitata superiormente, altrimenti la serie diverge a $+\infty$ (non può essere irregolare)

Sia $K_0 \in \mathbb{N}$ e

$f : [K_0, +\infty) \in \mathbb{R}$ tale che $f \geq 0$ f e monotona non crescente

Allora

$$\sum_{k=K_0}^{\infty} f(k) \quad \text{converge (div.)} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{K_0}^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{converge (div.)}$$

Dim: (supponiamo $K_0 = 0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots$$

Poiché f è monotona non crescente,

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \qquad \forall x \in [k, k+1]$$

Integriamo in $(k, k+1)$

$$0 \leq f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k)$$

Integriamo in $(k, k+1)$

$$0 \leq f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)$$

Sommando su k tra 0 e n:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) = s_n$$

$j := k+1$ si ha $\sum_{k=0}^{n} f(k+1) = \sum_{j=1}^{n+1} f(j) = s_{n+1} - f(0)$.
Quindi

$$s_{n+1} - f(0) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq s_n$$

Quindi, facendo tendere $n \to +\infty$, l'integrale improprio converge se e solo se la serie numerica converge (basta provare che s_n è limitata superiormente visto che è monotona non decrescente)

La serie armonica generalizzata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{è convergente} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1$$

essendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1$$

Il criterio integrale si può applicare poiché $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0$ e monotona decrescente in $[1, +\infty)$

OSS: si recupera il fatto che la serie armonica diverge ($\alpha = 1$) e la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$

Consideriamo serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{con } a_k \geq 0$$

(è sufficiente che $a_k \geq 0$ definitivamente per $k \to +\infty$).
Se

$$0 \leq a_k \leq b_k \qquad \text{definitivamente per } k \to +\infty \tag{1}$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$$

Poiché $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$
(se (1) vale da $k = 0$, altrimenti nella somma si parte da N_0)

Serie assolutamente convergenti

Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice Assolutamente convergente se converge (semplicemente) la serie a termini non negativi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

Poiché risulta:

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, ,$$

una serie che converge assolutamente, converge anche semplicemente.
Inoltre alla serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ si possono applicare i criteri validi per serie a termini non negativi che per questo motivo si chiamano Criteri di convergenza assoluta

Criterio del confronto asintotico

Dal comportamento della serie armonica generalizzata e dal criterio del confronto segue che se esistono $C > 0, \alpha > 1$ tali che definitivamente per $k \to +\infty$

$$|a_k| \leq \frac{C}{k^\alpha}$$

(in particolare se ha ordine di infinitesimo $\alpha > 1$) allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente (e semplicemente). Se esistono $C > 0, \beta \in (0, 1]$ tali che definitivamente per $k \to +\infty$

$$a_k > \frac{C}{k^\beta}$$

(in particolare se ha ordine di infinitesimo $\beta \leq 1$) allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$

Attenzione: $|a_k| = o(\frac{1}{k})$ NON implica che la serie converge!

Esempio

Consideriamo

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\beta}}\,; \qquad \beta > 0$$

Si ha $a_k = \frac{1}{k(\log k)^{\beta}} > 0$ (per $k \geq 2$) e $a_k = o(\frac{1}{k})$.
Il comportamento della serie dipende dal parametro β. Poiché $a_k = f(k)$ con

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^{\beta}}$$

e f è monotona decrescente per x grande, infatti:

$$f'(x) = \frac{-(\log x)^{\beta} - \beta(\log x)^{\beta-1}}{x^2(\log x)^{2\beta}} < 0 \qquad \text{per } x > 1,$$

per il criterio integrale:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\beta}} < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\beta}} < \infty$$

cioè se e solo se $\beta > 1$.

Esercizio (svolto a lezione)

Verificare che

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\log k)^{\beta}} ;$$

converge $\forall \beta \in \mathbb{R}$ se $\alpha > 1$ e non converge per alcun $\beta \in \mathbb{R}$ se $\alpha \in (0, 1)$.

Criterio del rapporto per convergenza assoluta

Il criterio del rapporto riguarda serie a termini non negativi, quindi si può considerare un criterio di convergenza assoluta per la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

- sia $a_k \neq 0$ definitivamente per $k \to +\infty$
- $\exists q \in (0,1)$ tale che

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \qquad \text{definitivamente per } k \to +\infty \tag{2}$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{converge assolutamente}$$

Oss: l'ipotesi $a_k \neq 0$ definitivamente serve per dare senso al rapporto in (2).

DIM: Per (2), esiste $K_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \qquad \forall k \geq K_0$$

Quindi

$$|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq |a_{k-2}|q^2 \leq \ldots \leq |a_{K_0}|q^{k-K_0}$$

Poiché

$$\sum_{k=K_0}^{\infty} |a_{K_0}|q^{k-K_0} = |a_{K_0}| \sum_{k=K_0}^{\infty} q^{k-K_0} = |a_{K_0}| \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

e la serie geometrica all'ultimo membro converge, essendo $q \in (0,1)$, per il criterio del confronto si ha la convergenza di $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Se invece

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \qquad \text{definitivamente per } k \to +\infty \tag{3}$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{non converge}$$

DIM: Per (3), esiste $K_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq \ldots \geq |a_{K_0}| \qquad \forall k > K_0$$

Quindi

$$\lim_{k\to+\infty} |a_k| \geq |a_{K_0}| \neq 0 \qquad \text{non vale la condizione necessaria di conv.}$$

Se in particolare,

$$\exists \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

allora

$$\begin{array}{lcl} \text{Se } L < 1 & \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty \\ \text{Se } L > 1 & \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = +\infty \\ \text{Se } L = 1 & \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \ ? \end{array}$$

Analogamente non si può concludere nulla se

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \qquad \text{definitivamente}$$

Esempio:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

verifica

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} \to 1 = L \qquad \forall \alpha > 0$$

ma la serie converge se e solo se $\alpha > 1$

Con il criterio del rapporto si può per esempio provare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$$

Infatti

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} \to 0 = L$$

o che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} < +\infty$$

infatti:

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{k!} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = (1 - \frac{1}{k+1})^k \to \frac{1}{e} < 1$$

Criterio della radice per convergenza assoluta

Il criterio della radice riguarda serie a termini non negativi, quindi si può considerare un criterio di convergenza assoluta per la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

- Se $\exists q \in (0,1)$ tale che

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \qquad \text{definitivamente per } k \to +\infty \tag{4}$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{converge assolutamente}$$

Dim: (4) $\Rightarrow |a_k| \leq q^k$ con $q \in (0,1)$, dal teorema del confronto segue la tesi.

- Se
$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \qquad \text{per infiniti valori di } k \tag{5}$$
Allora
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{non converge}$$

Dim: (5) $\Rightarrow |a_k| \geq 1$ per infiniti k e dunque la condizione necessaria per la convergenza della serie non è soddisfatta
OSS: se esiste $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$ allora la serie converge assolutamente se $L < 1$, non converge se $L > 1$, non si sa nel caso $L = 1$

Esempio

Vediamo un esempio dove il criterio della radice ci permette di determinare la natura della serie mentre quello del rapporto no:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^k}{5}\right)^k$$

In questo caso

$$a_k = \left(\frac{2+(-1)^k}{5}\right)^k = \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^k & \text{per } k \text{ pari} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^k & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{3}{5} = q \qquad \forall k \quad \Rightarrow \quad \text{la serie converge}$$

facendo

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{1}{5 \cdot 3^k} & \text{per } k \text{ pari} \\ \frac{3^{k+1}}{5} & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{non si conclude nulla}$$

Abbiamo visto che laconvergenza assoluta di una serie implica la convergenza semplice.
È vero anche il viceversa? NO Infatti la serie armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \qquad \text{mentre} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{converge}$$

Come si prova la convergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$?
Segue dal criterio di Leibniz che riguarda la convergenza di serie con termini di segno alterno, cioè della forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \qquad \text{con } a_k \geq 0$$

Criterio di Leibniz per convergenza di serie a termini di segno alterno

Consideriamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ con:

- $$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

- Esiste $K_0 \in \mathbb{N}$ tale che
$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k \qquad \forall k \geq K_0$$
(cioè a_k è definitivamente non negativa e decrescente per $k \to +\infty$)

Allora
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \qquad \text{converge semplicemente}$$

ed inoltre $S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ verifica:

$$s_{2n+1} \leq S \leq s_{2n} \quad \text{se } 2n \geq K_0 \quad \text{e } |S - s_n| = |R_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq K_0$$

DIM: Supponiamo $K_0 = 0$, quindi a_k è non negativa, monotona decrescente e tende a zero. Proviamo che s_{2n} è decrescente e limitata inferiormente da s_1 mentre s_{2n+1} è crescente e limitata superiormente da $s_0 = a_0$, infatti:

$$
\begin{aligned}
&s_0 = a_0 \\
&s_1 = a_0 - a_1 \leq s_0 \\
&s_2 = s_1 + a_2 \geq s_1 \ (a_2 \geq 0) \qquad s_2 = s_0 - (a_1 - a_2) \leq s_0 \ (a_1 \geq a_2) \\
&s_3 = s_2 - a_3 \leq s_2 \ (a_3 \geq 0) \qquad s_3 = s_1 + (a_2 - a_3) \geq s_1 \ (a_2 \geq a_3) \\
&s_4 = s_3 + a_4 \geq s_3 \ (a_4 \geq 0) \qquad s_4 = s_2 - (a_3 - a_4) \leq s_2 \ (a_3 \geq a_4)
\end{aligned}
$$

Quindi

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots \geq s_{2n} \geq s_{2n+2} \ldots$$

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \ldots$$

Perciò

$$|\inf(s_{2n}) - \sup(s_{2n+1})| \leq |s_{2n} - s_{2n+1}| = |a_{2n+1}| \to 0$$

$\Rightarrow$ $s_{2n} \to S^+$, $s_{2n+1} \to S^-$ e $|S - s_n| \leq |a_{n+1}|$

Poiché $\frac{1}{k} > 0$ è monotona decrescente e tende a zero, per il criterio di Leibniz la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$ converge semplicemente pur non convergendo assolut.

Esempio: Studiare la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + \cos k}$$

Se $a_k := \frac{1}{2k+\cos k}$, si ha $a_k > 0$ per $k \geq 1$ e $a_k = \frac{1}{2k}(1 + o(1))$ quindi la serie per il criterio del confronto NON converge assolutamente. Per la convergenza semplice dobbiamo vedere se:

$$a_k \to 0 \qquad \text{vero!}$$

e a_k decrescente (almeno definitivamente). Per questo, consideriamo $f(x) = \frac{1}{2x+\cos x}$. Risulta $f'(x) = \frac{-2+\sin x}{(2x+\cos x)^2} < 0$ quindi f decresce ed anche $a_k = f(k)$. La serie dunque converge semplicemente.

Importanza della monotonia della successione nel criterio di Leibniz

Nel criterio di Leibniz l'ipotesi di monotonia su a_k almeno definitivamente non si può eliminare. Infatti, consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[\frac{\sqrt{k}+(-1)^k}{k}]$$

qui $a_k = [\frac{\sqrt{k}+(-1)^k}{k}] \geq 0$ per $k \geq 1$ e verifica $a_k \to 0$ se $k \to +\infty$
Però la serie non converge, infatti:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[\frac{\sqrt{k}+(-1)^k}{k}] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

La prima delle due serie converge per il criterio di Leibniz poiché $\frac{1}{\sqrt{k}}$ tende a zero decrescendo mentre la seconda è la serie armonica che non converge. Quindi la somma delle due serie non converge.
L'unica ipotesi che non è soddisfatta è la monotonia di a_k
$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^k}{k}$ in quanto $\frac{(-1)^k}{k}$ non è definitivamente decrescente

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \sqrt{e}(\cos\frac{1}{k})^{k^2};$$

abbiamo:

$$a_k = 1 - \sqrt{e}(\cos\frac{1}{k})^{k^2} = 1 - e^{\frac{1}{2} + k^2 \log(\cos\frac{1}{k})}$$

poiché

$$\cos\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!k^4} + o(\frac{1}{k^5})$$

$$\log(\cos\frac{1}{k}) = \log(1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!k^4} + o(\frac{1}{k^5})) = -\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!k^4} - \frac{1}{8k^4} + o(\frac{1}{k^4})$$

$$a_k = 1 - e^{-\frac{1}{12k^2} + o(\frac{1}{k^2})} = -\frac{1}{12k^2}(1 + o(1))$$

e, per il criterio del confronto asintotico, la serie converge ($a_k > 0$)

Esercizi

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \sqrt{e}(\cos\frac{1}{k})^{k^2} \, ;$$

abbiamo:

$$a_k = 1 - \sqrt{e}(\cos\frac{1}{k})^{k^2} = 1 - e^{\frac{1}{2} + k^2 \log(\cos\frac{1}{k})}$$

poiché

$$\cos\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!k^4} + o(\frac{1}{k^5})$$

$$\log(\cos\frac{1}{k}) = \log(1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!k^4} + o(\frac{1}{k^5})) = -\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!k^4} - \frac{1}{8k^4} + o(\frac{1}{k^4})$$

$$a_k = 1 - e^{-\frac{1}{12k^2} + o(\frac{1}{k^2})} = -\frac{1}{12k^2}(1 + o(1))$$

e, per il criterio del confronto asintotico, la serie converge ($a_k > 0$)

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k \sin \frac{1}{k})^{k^3}$$

abbiamo:

$$a_k = (k \sin \frac{1}{k})^{k^3} = (1 - \frac{1}{6k^2} + o(\frac{1}{k^3}))^{k^3}$$

osserviamo che definitivamente $\sin \frac{1}{k} > 0$ e quindi $a_k > 0$. Per il criterio della radice:

$$\sqrt[k]{a_k} = (1 - \tfrac{1}{6k^2} + o(\tfrac{1}{k^3}))^{k^2} = e^{k^2 \log(1 - \frac{1}{6k^2} + o(\frac{1}{k^3}))} = e^{k^2(-\frac{1}{6k^2} + o(\frac{1}{k^2}))}$$
$$= e^{-\frac{1}{6}(1+o(1))} \to e^{-\frac{1}{6}} < 1$$

dunque, per il criterio della radice, la serie converge.

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k \sin \frac{1}{k})^{k^3}$$

abbiamo:

$$a_k = (k \sin \frac{1}{k})^{k^3} = (1 - \frac{1}{6k^2} + o(\frac{1}{k^3}))^{k^3}$$

osserviamo che definitivamente $\sin \frac{1}{k} > 0$ e quindi $a_k > 0$. Per il criterio della radice:

$$\sqrt[k]{a_k} = (1 - \frac{1}{6k^2} + o(\frac{1}{k^3}))^{k^2} = e^{k^2 \log(1 - \frac{1}{6k^2} + o(\frac{1}{k^3}))} = e^{k^2(-\frac{1}{6k^2} + o(\frac{1}{k^2}))}$$
$$= e^{-\frac{1}{6}(1+o(1))} \to e^{-\frac{1}{6}} < 1$$

dunque, per il criterio della radice, la serie converge.

Studiare il carattere della serie seguente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^\alpha \sin \frac{1}{k} =: \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

$a_k = k^\alpha \sin \frac{1}{k} > 0$ definitivamente per $k \to +\infty$
poiché

$$a_k = \frac{1}{k^{1-\alpha}}(1 + o(1))$$

se $1 - \alpha > 1$ cioè $\alpha < 0$ allora la serie converge assolutamente

se $\alpha \geq 1$ allora $|a_k|$ NON tende a zero e la serie NON converge

se $0 \leq \alpha < 1$ la condizione necessaria è verificata poiché $a_k \to 0$

Inoltre, se $0 \leq \alpha < 1$, a_k è definitivamente decrescente, infatti:

$$\begin{aligned}(x^\alpha \sin \tfrac{1}{x})' &= \alpha x^{\alpha-1} \sin \tfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \tfrac{1}{x} \\ &= x^{\alpha-2}(- \cos \tfrac{1}{x} + \alpha x \sin \tfrac{1}{x}) = x^{\alpha-2}(-1 + \alpha + o(1)) < 0 \quad x \to +\infty\end{aligned}$$

per il criterio di Leibniz si ha la convergenza semplice della serie

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{kx}{1+k^2x^2}-\frac{(k+1)x}{1+(k+1)^2x^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Fissato $x \in \mathbb{R}$, si tratta di una serie telescopica con $b_k = \frac{kx}{1+k^2x^2}$. Poiché $b_k \to 0$ se $k \to +\infty$ per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha convergenza della serie per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$ e la somma della serie $S = b_1 = \frac{x}{1+x^2}$.

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{kx}{1+k^2x^2}-\frac{(k+1)x}{1+(k+1)^2x^2}\right) \qquad x\in\mathbb{R}$$

Fissato $x\in\mathbb{R}$,si tratta di una serie telescopica con $b_k=\frac{kx}{1+k^2x^2}$. Poiché $b_k\to 0$ se $k\to+\infty$ per ogni fissato $x\in\mathbb{R}$, si ha convergenza della serie per ogni fissato $x\in\mathbb{R}$ e la somma della serie $S=b_1=\frac{x}{1+x^2}$.

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log\left(e^{2k}+4\right)}{k^{\frac{5}{2}}+k\log k+3}\cos\left(\frac{k^3+1}{k^2+3}\right) =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

La serie non è a termini non negativi né a termini di segno alterno perché l'argomento del cos diverge se $k \to +\infty$ ed il cos oscilla. Vediamo se la serie converge assolutamente (questo implica la convergenza semplice).

$$|a_K| \leq \frac{\log\left(e^{2k}+4\right)}{k^{\frac{5}{2}}+k\log k+3} =: b_k$$

ma per $k \to +\infty$

$$b_k = \frac{2k+\log\left(1+4e^{-2k}\right)}{k^{\frac{5}{2}}(1+o(1))} = \frac{2k+o(1)}{k^{\frac{5}{2}}(1+o(1))} \leq \frac{C}{k^{\frac{3}{2}}}$$

e per il criterio del confronto asintotico si ha la convergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ e dunque, per il confronto, la convergenza assoluta sella serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log\left(e^{2k}+4\right)}{k^{\frac{5}{2}}+k\log k+3}\cos\left(\frac{k^3+1}{k^2+3}\right) =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

La serie non è a termini non negativi né a termini di segno alterno perché l'argomento del cos diverge se $k \to +\infty$ ed il cos oscilla. Vediamo se la serie converge assolutamente (questo implica la convergenza semplice).

$$|a_K| \leq \frac{\log\left(e^{2k}+4\right)}{k^{\frac{5}{2}}+k\log k+3} =: b_k$$

ma per $k \to +\infty$

$$b_k = \frac{2k+\log\left(1+4e^{-2k}\right)}{k^{\frac{5}{2}}(1+o(1))} = \frac{2k+o(1)}{k^{\frac{5}{2}}(1+o(1))} \leq \frac{C}{k^{\frac{3}{2}}}$$

e per il criterio del confronto asintotico si ha la convergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ e dunque, per il confronto, la convergenza assoluta sella serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|2x+3|^{n^2}}{n!}$$

La serie è a termini non negativi. Applicando il criterio del rapporto,

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|2x+3|^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \frac{|2x+3|^{2n+1}}{n+1}$$

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \begin{cases} 0 & \text{se } |2x+3| \le 1 \\ +\infty & \text{se } |2x+3| > 1 \end{cases}$$

Pertanto la serie converge se e solo se $x \in [-2, -1]$

Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|2x+3|^{n^2}}{n!}$$

La serie è a termini non negativi. Applicando il criterio del rapporto,

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|2x+3|^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \frac{|2x+3|^{2n+1}}{n+1}$$

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \begin{cases} 0 & \text{se } |2x+3| \leq 1 \\ +\infty & \text{se } |2x+3| > 1 \end{cases}$$

Pertanto la serie converge se e solo se $x \in [-2, -1]$

Esempio di funzione non limitata all'infinito ma con integrale improprio convergente

- Se f ammette limite L per $x \to +\infty$ e l'integrale $|\int_a^{\infty} f(x)dx| < +\infty$ allora $L = 0$. Altrimenti, se $L \neq 0$ (per esempio $L > 0$), si ha definitivamente

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \qquad \forall x > k_0$$

allora

$$+\infty = (L-\epsilon)\int_{k_0}^{+\infty} dx \le \int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx \le (L+\epsilon)\int_{k_0}^{+\infty} dx$$

Però esistono funzioni definitivamente non limitate, che non ammettono limite per $x \to +\infty$ ma che hanno integrale improprio all'infinito convergente:

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } n \le x < n + \frac{1}{n^3} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} n\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n^3} < +\infty$