

Soluzione esercizi foglio 3

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente: Alessandra Cutrì

14/11/2018

Esercizi ! Osservare

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^4(1 - \cos \frac{1}{x})}{x^2 + 3} \quad (a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x} \quad (b)$$

Soluzione (a) :

$$\text{Per } x \rightarrow +\infty \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + x^4(1 - \cos \frac{1}{x}) &= x^2 + x^4 \left(\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= \frac{3}{2}x^2 (1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2}x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \frac{3}{2}$$

Sol. (b)

$$x \rightarrow 0 \quad \sin x \rightarrow 0 \Rightarrow e^{\sin x} = 1 + \sin x + o(\sin x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2} &= 1 + \sin x + o(\sin x) - 1 - x - \frac{x^2}{2} \\ &= \sin x + o(x) - x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (b) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{o(x)}{x} = 0$$

ho visto che $-\frac{x^2}{2} = o(x)$!

e $o(x) < o(x)$

Attenzione: la forma
indeterminata
non è valida perché ad esempio
non c'è x

Altrimenti il denominatore comune
che con gli sviluppi adottati

$\sim o(x)$

Se al denominatore ci fosse
stato x^2 con $\sim$

la forma sarebbe rimasta
indeterminata?

2) Confrontare tra loro i seguenti
infiniti (per $x \rightarrow +\infty$) ed ordinarli
in ordine crescente:

$$2^x$$

$$x^x$$

$$x \log x$$

$$\frac{x^2}{\log x}$$

$$e^{x^2}$$

$$2^x \log x$$

$$x^2 2^{x^2}$$

$$2^{(3^x)}$$

Svolgimento:

Per il teorema notevole $\frac{a^x}{x^x} \rightarrow 0$
per $a > 1$

$$\Rightarrow a^x = o(x^x)$$

$$\Rightarrow 2^x \text{ è più lento di } x^x (= e^{x \log x})$$

• $x \log x$ è più lento di 2^x (limite notevole)

• $\frac{x^2}{\log x}$ è più veloce di $x \log x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{x^2 \frac{1}{\log x}} = \frac{(\log x)^2}{x} \rightarrow 0$$

ma $\frac{x^2}{\log x}$ è più lento di 2^x

(però $\frac{x^2}{\log x}$ è più lento di x^x che è più lento di 2^x)

per il momento abbiamo

$$x \log x \quad \frac{x^2}{\log x} \quad \begin{matrix} 2^x & x^x \\ \uparrow \\ 2^x \log x \end{matrix}$$

$2^x \log x$ è più veloce di 2^x e più lento di x^x upda

$$\frac{2^x \log x}{x^x} = \log x \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^x = (\log x) e^{-x \log \frac{x}{2}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 2^x \log x = o(x^x)$$

$x^2 2^x$ è più veloce di $2^x \log x$

ed è più lento di x^x upda

$$\frac{x^2 2^x}{x^x} = x^2 \left(\frac{2}{x}\right)^x = x^2 e^{-x \log \frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$x \log x, \frac{x^2}{\log x}, 2^x, 2^x \log x, x^2 2^x, x^x$$

Però $2^{(3^x)} = e^{3^x \ln 2}$ è più veloce di

$$x^x = e^{x \ln x}$$

$$\frac{e^{x \ln x}}{e^{3^x \ln 2}} = e^{x \ln x - 3^x \ln 2} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow x^x < 0 \left(e^{3^x \ln 2} \right)$$

Quindi l'ordine crescente è

$$x \ln x, \frac{x^2}{\ln x}, 2^x, 2^x \ln x, x^2 2^x, x^x, 2^{(3^x)}$$

3) Determinare gli ordini di
infinitesimo rispetto a x per $x \rightarrow 0^+$
di

$$x^{1/3} + x^{1/2} = x^{1/3} (1 + o(1)) \quad dz = 1/3$$

$$\frac{x + \sin x}{\sqrt{x}} = \frac{2x + o(x)}{\sqrt{x}} = 2x^{1/2} (1 + o(1)) \quad dz = 1/2$$

$$\begin{aligned} x \arctan \sqrt{x-x^2} &= x \left(\sqrt{x-x^2} + o(\sqrt{x-x^2}) \right) \\ &= x \left(\sqrt{x} (1 + o(1)) \right) = x^{3/2} (1 + o(1)) \quad dz = 3/2 \\ \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{x^{1/4} (1 + o(1))} = x^{1/4} (1 + o(1)) \quad dz = 1/4 \end{aligned}$$

(4a) (Stedene $\frac{2}{3}$ $e^{-\frac{1}{x^4}}$ $+ x^{1/5}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{2/3} - e^{-\frac{1}{x^4}} + x^{1/5}}{3e^{x^{1/5}} - 3\cos(x^{1/3})} \quad (*)$$

Per $x \rightarrow 0$ $e^{-\frac{1}{x^4}} = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$
 $\Rightarrow$ Numeratore $\sim x^{1/5}$ (1to41)

Denominatore?

$$3e^{x^{1/5}} = 3(1 + x^{1/5} + o(x^{1/5}))$$

$$-3\cos(x^{1/3}) = -3(1 - \frac{1}{2}x^{2/3} + o(x^{2/3}))$$

Denominatore $\sim 3x^{1/5} + \frac{3}{2}x^{2/3} + o(x^{1/5})$

$\uparrow$
 $o(x^{1/5})$

$$\sim 3x^{1/5} \text{ (1to41)}$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/5} \text{ (1to41)}}{3x^{1/5} \text{ (1to41)}} = \frac{1}{3}$$

(4b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{x/2} - 2 \ln \frac{3}{x^{1/3}} + \frac{1}{x} \right) (x^{1/5} + \ln(1-x) + x^{1/3})$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty \quad x^{1/5} &\approx 0 \quad (x^{1/3}) \\ \ln(1-x) &\approx 0 \quad (x^{1/3}) \Rightarrow x^{1/3}(1+o(1)) \\ &\uparrow \\ &\sim \ln(-x) \end{aligned}$$

$e^{x/2} \rightarrow 0$ ed è un infinitesimo
di ordine superiore ad ogni
potenza $\frac{1}{|x|^\alpha} \quad \forall \alpha > 0$
 $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^{1/3}} = \frac{3}{x^{1/3}} \quad (1+o(1))$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{1/3}}} = \frac{1}{x} x^{1/3} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (4b) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{x^{1/3}} (1+o(1)) \cdot x^{1/3} (1+o(1)) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$(4c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{\sqrt{x}} + e^{-3x} \right) (x^{1/2} + x^{1/3})$$

$\downarrow$
 $x^{1/2}(1+o(1))$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} (1+o(1))$$

$$e^{-3x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (4c) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} (1+o(1)) x^{1/2} (1+o(1)) \\ &= -2 \end{aligned}$$

5) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = \frac{2e^{(\arcsin x)^2} - 2 - x}{(1 - \cos(x^2))^\alpha}$$

$\bar{x}$ un infinito o un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ - Determinare, se esiste, il maggior ordine di infinito (negativo a $\frac{1}{x}$) e di infinitesimo (negativo a x)

$$\text{per } x \rightarrow 0 \quad \cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \text{DENOM} = x^{4\alpha} (c + o(1)) \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{Poiché } \arcsin x = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \arcsin x \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$2e^{(\arcsin x)^2} = 2(1 + (\arcsin x)^2 + o(x^2))$$

$$= 2 + 2x^2 + o(x^2) = 2 + o(x)$$

$$\underline{\text{NUM}} = -x + o(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x(-1 + o(1))}{x^{4\alpha}(c + o(1))} = x^{1-4\alpha} (c + o(1))$$

Se $1-4\alpha > 0$ $\alpha < 1/4$

$f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$ con
ordine di infinitesimo $\beta = 1-4\alpha$

Se $1-4\alpha < 0$ ($\alpha > 1/4$)

$\Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$

caso limite ($\beta = 4\alpha - 1$)

Se $\alpha = 1/4$ f non è infinitesimo
né uguale per $x \rightarrow \infty$

6) Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \rightarrow +\infty$ le seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{3x}} - \frac{\cos\left(\frac{1}{3x}\right)}{5\sqrt{3x + \frac{1}{3x}}}$$

$$g(x) = \sin^2\left(\frac{1}{7x^{9/4}}\right) \arctan(\sqrt{x})$$

$$h(x) = \left(\log(\sqrt{x})\right) \left(\sin^2 \frac{1}{7x^{9/4}}\right)$$

Partiamo da

$$g(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{\frac{1}{49x^{9/2}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + o(1)\right)} \quad \alpha = 9/2$$

$$h(x) = (\log x) \left(\frac{1}{49x^{9/2}}\right) (c + o(1))$$

$\Rightarrow h$ è più lenta di $g \Leftrightarrow g = o(h)$
 mentre ordine reale

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{3x}} - \frac{1 - \frac{1}{18x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{5\sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{9x^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{3x}} \left[\left(1 + \frac{1}{9x^2}\right)^{1/2} - 1 + \frac{1}{18x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] (1+o(1))$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{3x}} \left[\cancel{1} + \frac{1}{18x^2} - \cancel{1} + \frac{1}{18x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{3x}} \left(\frac{1}{9x^2} (1+o(1)) \right) = \frac{1}{x^{5/2}} (1+o(1))$$

$\Rightarrow \alpha = 5/2$

f est plus lente que h ($h = o(f)$)

donc l'ordre e f, h, g