

Esercizio n° 1

Studio di funzione

$f(x) = \arctan(|e^x - 2| - 1)$ e
disegnare un grafico qualitativo

dom $f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(e^x - 3) & x \geq \ln 2 \\ \arctan(1 - e^x) & x < \ln 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi/2 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \text{ as. as. } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} \text{ as. as. } x \rightarrow -\infty$$

$$f \in C(\mathbb{R}) \quad f(\ln 2) = -\pi/4$$

Se $x \neq \ln 2$ f è derivabile e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{1 + (e^x - 3)^2} & x > \ln 2 \\ \frac{-e^x}{1 + (1 - e^x)^2} & x < \ln 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\lg 2)^+} f'(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\lg 2)^-} f'(x) = -1$$

$\Rightarrow$ f has 'max' at $\lg 2$ in pt. analysis

Involve

$f' > 0$ for $x > \lg 2$ f increasing

$f' < 0$ for $x < \lg 2$ f decreasing

$\Rightarrow x = \lg 2$ pt. of minimum

for $x > \lg 2$

$$f''(x) = \frac{e^x}{[1 + (e^x - 3)^2]^2} (10 - e^{2x})$$

increasing for $x > \lg 2$

$$f'' > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 10 \Leftrightarrow 2x < \lg 10$$

$$x < \lg \sqrt{10}$$

$\Rightarrow x \in (\lg 2, \lg \sqrt{10})$ f convessa

$x > \lg \sqrt{10}$ f concava

$x = \lg \sqrt{10}$ pt. di flesso

Se invece $x < \lg 2$

$$f''(x) = \frac{e^x (e^{2x} - 2)}{[1 + (1 - e^x)^2]^2}$$

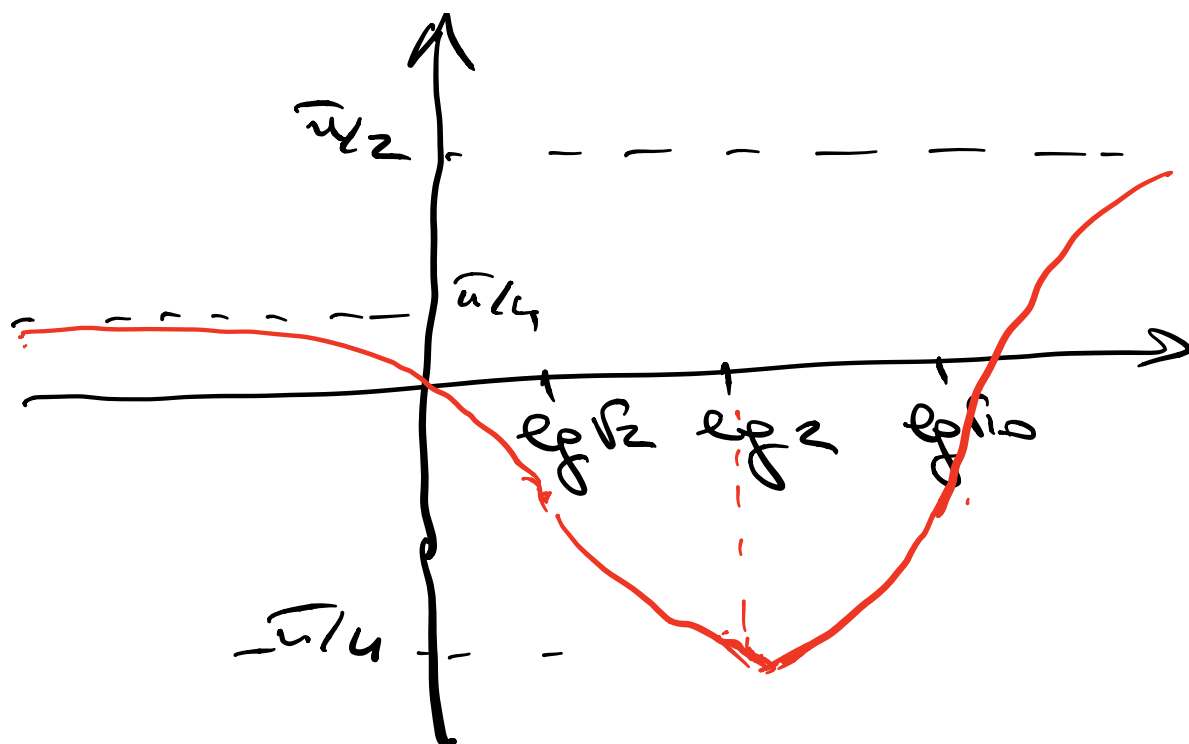
$$f'' > 0 \quad 2x > \lg 2 \quad \Rightarrow x > \lg \sqrt{2}$$

Quindi

$x \in (\lg \sqrt{2}, \lg 2)$ f convessa

$x < \lg \sqrt{2}$ f concava

$\Rightarrow x = \lg \sqrt{2}$ pt. di flesso



Esercizio n° 2

Disporre in ordine di infinito crescente (specificando l'ordine ove possibile) le seguenti successioni:

$$a_n = \frac{n^3}{3^n (\sqrt{1+9^n} - 1) (\sqrt{1+\frac{1}{9^n}} - 1)}$$

$$\sqrt{1+9^n} - 1 = 3^n (1 + o(1))$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+9^{-n}} - 1 &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 9^n} - 1 + o\left(\frac{1}{9^n}\right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 9^n} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^3}{\cancel{3^n} \cdot \cancel{3^n} \frac{1}{29^n} (1+o(1))} = 2n^3 (1+o(1))$$

$\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ *concludiamo*
 $\alpha = 3$

$$b_n = n^2 \lg(1+n)$$

non ha ordine di infinito

ma essendo $\lg(1+n) \geq 0$

$$\Rightarrow b_n = o(a_n) \quad n \rightarrow +\infty$$

$$c_n = n^2 \frac{1}{\lg^2 n} = o(n^2)$$

ed essendo $n^2 = o(b_n)$

$$c_n < b_n < a_n$$

$$d_n = \frac{(n+2)! \cdot (n-1)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{[(n+2)(n+1)n-1] \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n+1)!} \cdot n(n+1)}$$

$= n(1+O(1)) \Rightarrow$ du ha
ordine di crescita $\beta=1$

ed essendo $\frac{du}{dn} \rightarrow 0$

$$du = O(n)$$

$$du \ll cn \ll bu \ll an$$

$$e_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{n^n} - 2 \exp \frac{1}{n^n}\right)^{1/n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3n^{3n}}\right)^{1/n}}$$

ha ordine di crescita $\gamma = 3$ (n^3)

quindi l'ordine crescente è

$$a_n < c_n < b_n \leq q_n v_n$$

a_n ed e_n hanno lo stesso

ordine di infinito

Esercizio n° 3

determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che

l'integrale improprio sia

convergente

$$\int_a^{+\infty} \frac{x e^{x-4}}{(2+x)^4 (x-3)^{1/5}} dx = f(x)$$

la funzione integranda non è definita per $x \rightarrow 3$ e per $x \rightarrow -2$

Inoltre l'integrale è sull'intervallo
limitato $(a, +\infty)$ -

$$\text{per } x \rightarrow +\infty \quad |f(x)| = O\left(\frac{1}{x^{4+1.5}}\right) \\ = O\left(\frac{1}{x^{21/5}}\right)$$

ed essendo $\frac{21}{5} > 1$

$\Rightarrow$ l'integrale ass. converge
assolutamente $\rightarrow$ semplicemente

Per altri problemi si hanno

in $(a, +\infty)$ contiene $x=30$
anche $x=-2$

per $x \rightarrow -2$ $f(x) > 0$ (così es. è
in un intorno
di $x=-2$)

$$f(x) = O\left(\frac{1}{(x-2)^4}\right) \quad x \rightarrow -2$$

$\Rightarrow$ essendo $4 > 1$ l'integrale
 su $(\alpha, +\infty) \ni -2$ non converge

per tanto per ogni scelta
 di $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha > -2$

Valiamo che succede vicino
 a 3

$$x \rightarrow 3 \quad |f(x)| = O\left(\frac{1}{|x-3|^{1/5}}\right)$$

essendo $\frac{1}{5} < 1$

$\Rightarrow$ l'integrale (anche se $(\alpha, +\infty)$
 contiene $x=3$) è convergente

$\Rightarrow \boxed{\alpha > -2}$ perché

$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ è convergente

Esercizio 4

Def convergenza serie numeriche:

cfr libri di testo
+ studiare al valore di
 $x \in \mathbb{R}$ il comportamento di
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|7x+5|^{k^2}}{k!}$$

È una serie a termini ≥ 0
di più usare il criterio
del rapporto:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|7x+5|^{(k+1)^2}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|7x+5|^{k^2}}$$

$$= \frac{1}{k+1} |7x+5|^{k^2 + 2k + 1 - k^2}$$

$$= \frac{1}{k+1} |7x+5|^{2k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} 0 & \text{if } |7x+5| \leq 1 \\ +\infty & \text{if } |7x+5| > 1 \end{cases}$$

Donc la série converge
si

$$|7x+5| \leq 1$$

$$-1 \leq 7x+5 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}\right]$$