Soluzione esercizi foglio 6
(lezione del 14/01/2019)

1. Esercizio: mettere in ordine di infinito crescente per $x \to +\infty$

a) $x \lg x$

b) $x \int_0^x e^{-t^2} dt$

c) $x^2 \lg(\lg x)$

oss: b): $\int_0^x e^{-t^2} dt$ per $x \to +\infty$ tende a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt < +\infty$

$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt$ è limitato cioè $O(1)$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ b) è $O(x)$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ b) è più lento di a) che è più lento di c)

Infatti

$$\frac{a)}{c)} = \frac{x \lg x}{x^2 \lg(\lg x)} = \frac{\lg x}{x \lg(\lg x)}$$

$y = \lg x$ $\quad y \to +\infty \quad$ se $x \to +\infty$

$$\frac{y}{e^y \lg y} \to 0 \Rightarrow x \lg x = o(x^2 \lg(\lg x))$$

l'ordine crescente è

b) a) c)

2° Esercizio: Dopo aver determinato una primitiva di $f(x) = \frac{\lg(1+x^2)}{x^2}$

calcolare $\lim_{n \to +\infty} \int_{1/n}^{n} f(x)dx$

Una primitiva di $f(x)$ la ottengo

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2}\lg(1+x^2)\,dx \underset{p.p.}{=} -\frac{1}{x}\lg(1+x^2)$$

$$+ \int \frac{1}{\cancel{x}} \frac{2\cancel{x}}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\lg(1+x^2) + 2\,\mathrm{arctg}\, x + C$$

Quindi: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{n} f(x)\,dx =$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\lg(1+n^2) + 2\operatorname{arctg} n + n\lg\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right) + n\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n}\lg(1+n^2)$$

$$= \pi - \underbrace{\frac{4}{n}}_{\downarrow \atop 0} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow \atop 0} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \underbrace{\frac{1}{n}\lg(1+n^2)}_{\downarrow \atop 0}$$

$$= \pi$$

Esercizio 3: Sia

$$g(x)=\int_0^{2x-4}(t-2)(t-10)(t-11)(2+\operatorname{sen}(1+t^2))\,dt$$

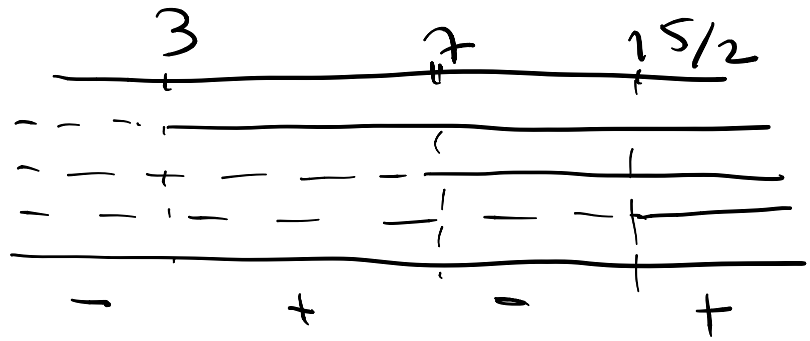
Determinare gli intervalli dove g è strettamente decrescente e calcolare $g(2)$. Dire poi per quali $A\in\mathbb{R}$ la seguente funzione

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\le 2 \\ \dfrac{27}{2-x}+A & \text{se } x>2 \end{cases}$$

è invertibile su $\mathbb{R}$

$g\in C^1$, vediamo dove $g'<0$

$$g'(x)=2\left[(2x-6)(2x-14)(2x-15)(2+\operatorname{sen}(1+(2x-4)^2))\right]$$



$2+\operatorname{sen}(1+x^2)>0$ sempre

$\Rightarrow g$ è strett. decr. se $x<3 \cup x\in(7,15)$

2

$$g(2) = \int_0^0 \boxed{}\, dt = 0$$

↑ essendo integrabile perché continua nei suoi argomenti

$\Rightarrow$ quindi f è $\searrow$ se $x \leq 2$

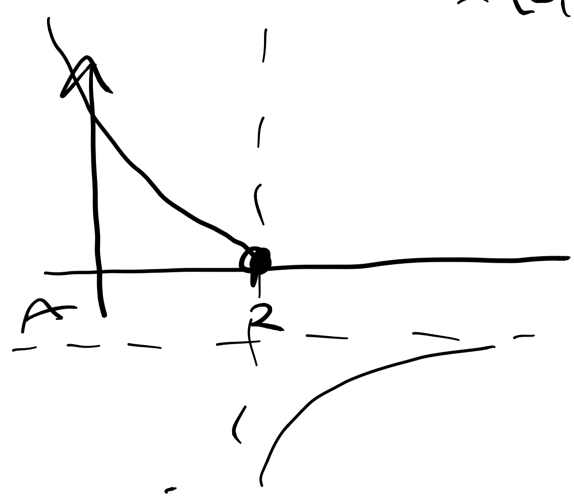
$f \nearrow$ se $x > 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A^-$

$\mathrm{Imm}(g|_{(-\infty, 2]}) = [0, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ (∗)



quindi f è invertibile $\Leftrightarrow A \leq 0$

(∗) perché la funzione integranda in g per $x \to -\infty$ tende a $-\infty$
$\Rightarrow \int_0^{-\infty} \triangleright\, dt = +\infty$

4) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - 2\alpha \operatorname{sen} x}{x^3}\, dx$$

converge

$$f(x) = \frac{x - 2\alpha \operatorname{sen} x}{x^3}$$

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow$ l'integrale all'infinito converge $\forall \alpha$

Vicino a zero:

$$f(x) = \frac{x - 2\alpha x + \frac{2\alpha}{6} x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \frac{(1-2\alpha)}{x^2} + \frac{\alpha}{3} + o(1) \qquad x \to 0$$

se $1 - 2\alpha = 0$ $\Rightarrow$ f è limitata vicino a zero

$\alpha = 1/2$

$\Rightarrow$ l'int. converge

se $1 - 2\alpha \neq 0$ $\quad \alpha \neq 1/2$ $\quad f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

per $x \to 0$ l'int. non conv. essendo f un infinito di ordine $2 > 1$

5) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^n$$

Vediamo prima la convergenza assoluta

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^n \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{n}\frac{|x+1|^n}{(x^2+1)^n}$$

possiamo usare il criterio del rapporto:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)}\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|^{n+1} \frac{n\,\cancel{|x^2+1|^n}}{\cancel{|x+1|^n}}$$

$$= \frac{n}{n+1}\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right| \longrightarrow \left|\frac{x+1}{x^2+1}\right|$$

Quindi $L = \dfrac{|x+1|}{|x^2+1|}$

se $L<1$ la serie conv. assolut.

se $L>1$ la serie diverge assol.

$L=1$? da vedere

Perciò se $\frac{|x+1|}{x^2+1} < 1$ cioè

$|x+1| < x^2+1 \iff -x^2-1 < x+1 < x^2+1$

$\iff \begin{cases} x < x^2 \iff x<0 \vee x>1 \\ x^2+x+2>0 \text{ sempre} \end{cases}$

Quindi per $x<0 \cup x>1$ la serie conv. assolut. e quindi anche sempl.

Se $\frac{|x+1|}{x^2+1} > 1$ la serie diverge (cioè in $x \in (0,1)$)

anche semplicemente perché $a_n \not\to 0$

se $\frac{|x+1|}{|x^2+1|} = 1$ $\quad |a_n| = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum |a_n| = +\infty$ quindi per $x=0$ e $x=1$

la serie non conv. assolut.

conv. semplicemente?

$\frac{|x+1|}{|x^2+1|} = 1 \iff \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \pm 1$

se $\frac{x+1}{x^2+1} = 1 \Rightarrow x = 0$ e $x = 1$
$\rightarrow \sum a_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

$\frac{x+1}{x^2+1} = -1$ <u>mai</u>

Quindi $x \in \mathbb{R}$ tali che la

serie conv. sono $x < 0 \vee x > 1$

e lì la serie conv. anche
assolutamente.

6) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}\right)^n$$

anche qui analizziamo prima la conv. assoluta

$$|a_n| = \frac{1}{n^2}\left|\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}\right|^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}\left|\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}\right|^{\cancel{n+1}} \frac{n^2}{\cancel{|\sqrt{x}+1|^n}}\cancel{|x-2|^n}$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2}\left|\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}\right| \to \left|\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}\right| =: L$$

se $L<1$ la serie conv assolut. e dunque anche semplicemente

$$\left|\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}\right| < 1 \iff -1 < \frac{\sqrt{x}+1}{x-2} < 1$$

se $x>2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{x-2} > 0$

$\Rightarrow$ è ovv. > -1 quindi

$$\begin{cases} x>2 \\ \sqrt{x}+1 < x-2 \end{cases}$$

se $x<2$

$\frac{\sqrt{x}+1}{x-2}<0<1 \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ \sqrt{x}+1<-x+2 \end{cases}$ $\qquad \underline{x \geq 0}$

ovvio

Quindi

$$\begin{cases} x>2 \\ \sqrt{x}<x-3 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \leq x<2 \\ \sqrt{x}<1-x \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x>2 \\ x>3 \\ x<(x-3)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in [0,2) \\ 1>x \\ x<(1-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3 \\ x<x^2-6x+9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in [0,1) \\ x<1+x^2-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3 \\ x^2-7x+9>0 \end{cases} \quad x>\frac{7+\sqrt{13}}{2} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x \in [0,1) \\ x^2-3x+1>0 \end{cases}$$

$x=\frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2}$ $\qquad x=\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\qquad 0 \leq x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Quindi $L<1 \Leftrightarrow 0 \leq x<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{7+\sqrt{13}}{2}$

Se $L>1$ la serie diverge

se $L<1$ la serie conv. assol.

perché $|a_n| = \frac{1}{n^2}$

ma $L=1 \iff x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ e $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Quindi la serie conv. assolut.
per $0 \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{7+\sqrt{13}}{2}$

e dunque anche semplicemente

non converge altrimenti.

7) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} \left(\frac{e^x+1}{e^x-1} \right)^n$$

$$|a_n| = \left| \frac{e^x+1}{e^x-1} \right|^n \frac{1}{2^n (n+1)}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2^{n+1}(n+2)} \quad 2^n (n+1) \left| \frac{e^x+1}{e^x-1} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \left| \frac{e^x+1}{e^x-1} \right| \to \frac{1}{2} \left| \frac{e^x+1}{e^x-1} \right|$$

$$L = \frac{1}{2} \left| \frac{e^x+1}{e^x-1} \right|$$

$L<1$ serie conv. assol.

$$\iff \left| \frac{e^x+1}{e^x-1} \right| < 2$$

$L>1 \iff \left| \frac{e^x+1}{e^x-1} \right| > 2$ serie non converge

$L = 1$

$\Rightarrow |a_n| = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum |a_n| = +\infty$

però bisogna vedere se la serie converge semplicemente

quando $\frac{e^x+1}{e^x-1} = -2$

$\Leftrightarrow e^x + 1 = -2e^x + 2 \Rightarrow 3e^x = 1$
$\Rightarrow e^x = 1/3$ $\boxed{x = -\lg 3}$

$\Rightarrow \sum = \sum \frac{1}{(n+1)} (-1)^n$ conv. per criterio di Leibniz

Vediamo quando

$$\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{e^x+1}{e^x-1} < 2$$

$$\begin{cases} e^x+1 < 2(e^x-1) \\ e^x > 1 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} e^x - 1 < 0 \\ e^x + 1 < 2 - 2e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \quad x > \lg 3 \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ 3e^x < 1 \end{cases}$$

$e^x < 1/3$

$x < -\lg 3$

$\iff |x| > \lg 3$ conv. assol

per $x = -\lg 3$ conv. semplice