Compito A   Es. n° 1

$$f(x) = 3|x+2| + 3x + 1 + \lg\left[\left(\frac{6x+11}{3x+5}\right)^2\right]$$

dom f $=$ $x \neq -5/3$ $x \neq -\frac{11}{6}$

$\lim_{x\to -5/3} f(x) = +\infty$ $x = -5/3$ asintoto verticale

$\lim_{x\to -\frac{11}{6}} f(x) = -\infty$ $x = -\frac{11}{6}$ asintoto verticale

$$f(x) = \begin{cases} 6x+7+\lg\left[\left(\frac{6x+11}{3x+5}\right)^2\right] & x \geq -2 \\ -5+\lg\left[\left(\frac{6x+11}{3x+5}\right)^2\right] & x < -2 \end{cases}$$

f è continua in dom f perché somma e composizione di funzioni continue (anche in $x=-2$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 6x+7+\lg 4 + o(1)$

$\Rightarrow \; = +\infty$ e $y = 6x+7+\lg 4$ è as. obl. a $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -5+\lg 4$

$\Rightarrow y = -5+\lg 4$ è asintoto orizzontale a $-\infty$

Per $x \neq -2$ ($x \in$ dom f) f è derivabile e se

$x > -2$

$$f'(x) = 6 + \left(\frac{3x+5}{6x+11}\right)^2 2\left(\frac{6x+11}{3x+5}\right)\frac{6(3x+5)-3(6x+11)}{(3x+5)^2}$$

$$= 6\left(1 - \frac{1}{(6x+11)(3x+5)}\right) = \frac{(18x^2+63x+54)6}{18x^2+63x+55}$$

se $x < -2$

$$f'(x) = \frac{-6}{(6x+11)(3x+5)}$$

$x \to -2^+$ $f'(x) \to 0$

$x \to -2^-$ $f'(x) \to -6$

$x=-2$ punto angoloso

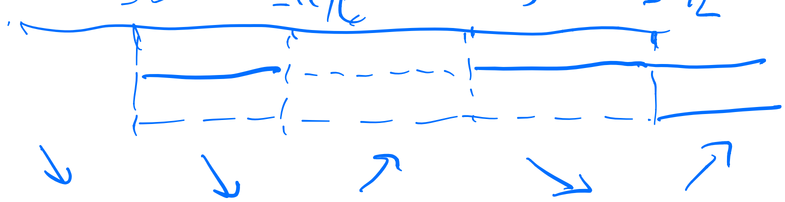
$-2 \quad -\frac{11}{6} \quad -5/3 \quad -3/2$

Quindi $f' = \begin{cases} -\dfrac{6}{18x^2+63x+55} < 0 & x<-2 \\ \dfrac{54(2x^2+7x+6)}{18x^2+63x+55} & x>-2 \end{cases}$

$2x^2+7x+6=0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \dfrac{-7\pm 1}{4} \begin{cases} -2 \\ -3/2 \end{cases}$

$-2 \quad -11/6 \quad -5/3 \quad -3/2$



$x=-3/2$ punto di minimo relativo

$f'' = \begin{cases} \dfrac{6(36x+63)}{(18x^2+63x+55)^2} = 54(4x+7) & x<-2 \\ \dfrac{54\left[(4x+7)(18x^2+63x+55) - (36x+63)(2x^2+7x+6)\right]}{(18x^2+63x+55)^2} & x>-2 \end{cases}$

f concava per $x<-2$

mentre per $x>-2$ segno $(f'') =$ segno $[\ ]$

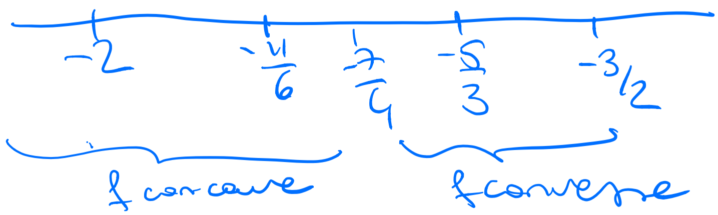
$[\ ] = (\cancel{4\cdot 18} - \cancel{36\cdot 2})x^3 + (\cancel{4\cdot 63} + \cancel{18\times 7} - \cancel{36\times 7} - \cancel{63\times 2})x^2$

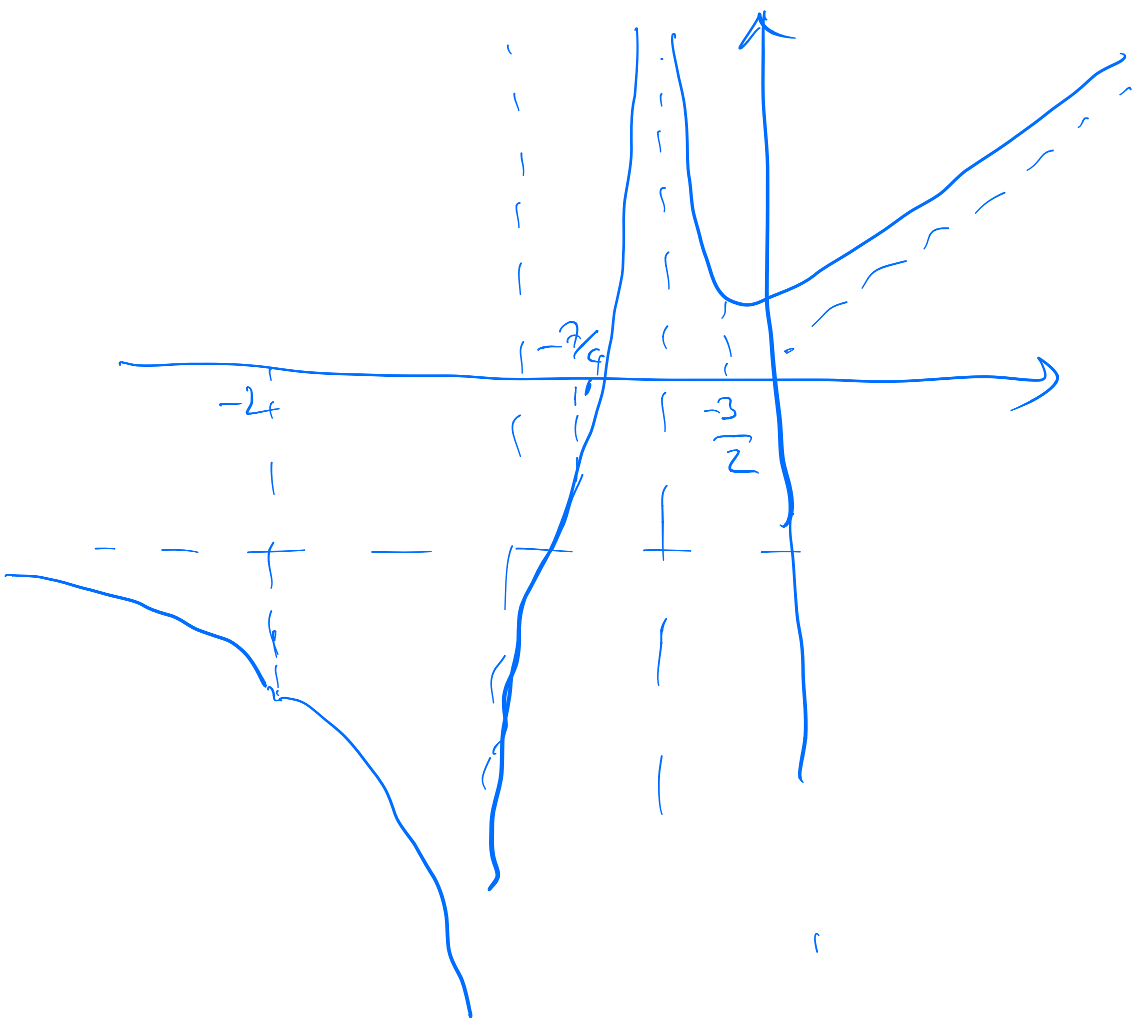
$+ (\underset{220}{55\times 4} + \cancel{7\times 63} - \underset{216}{36\times 6} - \cancel{7\times 63})x + \underset{385\ -\ 378}{7\times 55 - 63\times 6}$

$= 4x+7 \qquad x=-7/4$ punto di flesso

$x > -7/4$ f convesse

$x \in (-2, -7/4)$ f concave





2° esercizio: Calcolare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}+9^{x^2}-2-\beta x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - 3^{-1/x^2}}$$

D: $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - 3^{-1/x^2}$

$$\underset{x\to 0^+}{=} \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5) \cancel{-1} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - o(x^5) = \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$$

perché $3^{-1/x^2} = o(x^5)$

in quanto per $x \to 0^+$ $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$

$3^{-1/x^2} \to 0$ più rapidamente di ogni potenza di x

N: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$

$$9^{x^2} = e^{x^2 \lg 9} = 1 + x^2 \lg 9 + \frac{1}{2}x^4 (\lg 9)^2 + o(x^5)$$

quindi

$$e^{x^2} + 9^{x^2} - 2 - \beta x^2 = x^2(1 + \lg 9 - \beta) + \frac{1}{2}\left(1 + (\lg 9)^2\right)x^4 + o(x^5)$$

perciò, se $\beta = 1 + \lg g$

il limite $= \dfrac{\frac{1}{2}(1+\lg g)^2}{\frac{1}{4}} = 2(1+\lg g)^2$

se $\beta > 1 + \lg g$

limite $= -\infty$

se $\beta < 1 + \lg g$ lim $= +\infty$

3° esercizio A

1° parte conv. di

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{(x^4+\lg(1+x^5))^{5-\alpha}}{x^{\alpha/5}(\lg x+5)^2}}_{f_\alpha}\,dx = I_\alpha$$

$f_\alpha \geq 0$ def. per $x \to +\infty$

l'unico problema è per $x \to +\infty$

$$f_\alpha(x) = \frac{(x^4+o(x^4))^{5-\alpha}}{x^{\alpha/5}(\lg x)^2}(1+o(1))$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{5}-4(5-\alpha)}(\lg x)^2}(1+o(1))$$

Per confronto asintotico

I_α converge $\iff \frac{\alpha}{5} - 4(5-\alpha) \geq 1$

$$\frac{\alpha}{5} + 4\alpha - 20 \geq 1$$

$$\alpha\left(4+\frac{1}{5}\right) - 20 \geq 1$$

$$\frac{21\alpha}{5} \geq 21 \qquad \alpha \geq 5$$

per $\alpha = 5$

$$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(\lg x + 5)^2}\,dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x(\lg x + 5)^2}\,dx$$

$y = \lg x \quad \Rightarrow dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int_0^{\lg \omega} \frac{1}{(y+5)^2}\,dy = -\frac{1}{y+5}\Big|_0^{\lg \omega}$$

$$= -\frac{1}{\lg \omega + 5} + \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow[\omega \to +\infty]{} \frac{1}{5} = I_5$$

Es 4 A

definizione (cfr. test di teoria)

2) Studiare, al variare di $\alpha > 0$

la conv. di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}+4} \lg(1+4^{-n})}_{a_n}$

$a_n \geq 0$

$$a_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}(1+o(1))}\left(\frac{1}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)\right)$$

$$\sim \left(\frac{\alpha}{4}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} (1+o(1))$$

se $\alpha > 4$ $\quad a_n \not\to 0 \Rightarrow$ la serie div.

se $\alpha = 4$ $\quad a_n \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

se $\alpha < 4$ $\quad a_n \leq \left(\frac{\alpha}{4}\right)^n$

e poiché la serie $\sum \left(\frac{\alpha}{4}\right)^n < +\infty$

se $\boxed{\alpha < 4}$ $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

b) determinare il carattere di

$$\sum \underbrace{\frac{\sqrt{n^4+3n}-n^2}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\sqrt{n}}_{a_n}$$

a_n non è a termini di segno costante def. perché $\operatorname{sen}\sqrt{n}$ oscilla tra -1 e 1 e non è a termini di segno alterno

però $|a_n| \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n^4+3n}-n^2}{\sqrt{n}}}_{b_n}$

$|\operatorname{sen}\sqrt{n}| \leq 1$

$$b_n = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^{1/2}-n^2}{\sqrt{n}} = \frac{n^2 \cdot \frac{3}{2n^3}}{\sqrt{n}} \sim \frac{3}{2n\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow \sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ conv