Lezione del 19 dicembre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente:Alessandra Cutrì

Argomenti:integrali impropri:esercizi di riepilogo. Derivabilità di funzioni composte con funzioni integrali, ordine di infinitesimo, limiti di funzioni integrali, altre proprietà

Esercizio: (Eserciz**i**o 12 f. 5)

Studiare la convergenza di

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{-1} (-t)^{\alpha+3} \lg(2-t)\, dt$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Se I_{-5} esiste finito, calcolarne il valore.

Problema è a $-\infty$ (visto che $0 \notin (-\infty,-1)$)

per $x \to -\infty$ $(\lg(2-x))(-x)^{\alpha+3}$ $\to +\infty$ se $\alpha+3>0$

$\Rightarrow$ perché $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \Rightarrow$ tale limite deve essere zero

se $\alpha+3<0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\lg(2-x)}{(-x)^{-3-\alpha}} \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

Perché la funzione sia integrabile basta che $-3-\alpha>1$ cioè $\alpha<-4$

Supponiamo $\alpha < -4$ $\exists\, \gamma > 0$ t.c. $\alpha + \gamma < -4$ $\quad -3 - \alpha - \gamma > 1$

$$0 < \frac{\lg(2-x)}{(-x)^{\gamma}} \longrightarrow 0 \text{ per } x \longrightarrow -\infty$$

$$\Rightarrow \lg(2-x) < (-x)^{\gamma}$$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{1}{(-x)^{-3-\alpha-\gamma}}$$

$-3-\alpha-\gamma > 1$

$\alpha < -4-\gamma$

$$\Rightarrow \int f(t)\,dt < +\infty$$

se invece $-4 \leq \alpha < -3$

$$\lg(2-x)\,(-x)^{\alpha+3}$$

$$= \frac{\lg(2-x)}{(-x)^{-3-\alpha}}$$

$-3-\alpha \leq 1$

$\Rightarrow (-x)^{-3-\alpha} \leq (-x)$ def. $x \leq -1$

$$\geq \frac{\lg(2-x)}{-x} \geq \frac{1}{-x}$$

$$\frac{1}{(-x)^{-3-\alpha}} \geq \frac{1}{(-x)}$$

e $\int_{-\infty} -\frac{1}{x}\,dx = +\infty \Rightarrow I_\alpha$ diverge

In conclusione I_α è $\begin{cases} \text{conv. se } \alpha < -4 \\ \text{div. se } \alpha \geq -4 \end{cases}$

$\alpha = -5 \Rightarrow I_{-5} < +\infty$ quando/vale?

$$I_{-5} = \int_{-\infty}^{-1} (-t)^{-2} \lg(2-t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\lg(2-t)}{(-t)^2}\,dt$$

$$\overset{=}{\scriptstyle p.p.} \underbrace{-\frac{1}{t}\lg(2-t)\Big|_{-\infty}^{-1}} - \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t}\,\frac{1}{(2-t)}\,dt \qquad = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\text{"}\lim_{\omega\to-\infty}\left[\frac{1}{t}\lg(2-t)\right]_{\omega}^{-1}\text{"}$$

$$\lim_{\omega\to-\infty} \text{"}+\lg 3\text{"} + \frac{1}{\omega}\lg(2-\omega) = +\lg 3$$

singolarmente int. div.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t(2-t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}\right)dt$$

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+Bt}{t(2-t)} = \frac{1}{t(2-t)}$$

$\Rightarrow A = B \quad \oplus \quad 2A = 1 \Rightarrow A = B = 1/2$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{-1} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\omega \to -\infty} \left(\log|t| - \log|2-t| \right) \Big|_{\omega}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\omega \to -\infty} -\log 3 - \log\left(\frac{|\omega|}{|2-\omega|} \right)$$

$$\downarrow$$

$$-\log\left(\frac{-\omega}{2-\omega} \right)$$

$$\downarrow \omega \to -\infty$$

$$0$$

$$= -\frac{1}{2} \log 3$$

$$\Rightarrow \quad I_{-5} = +\log 3 + \frac{1}{2} \log 3 = +\frac{3}{2} \log 3$$

Esercizio: Ordine di infinitesimo di funzioni integrali:

Stabilire l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ di

$$F_\alpha(x) = \int_0^x tg(t^\alpha - t)\, dt$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$

se $\alpha > 0$ $t^\alpha - t$ è continua in un intorno destro $U_+(0)$

$\Rightarrow$ $t^\alpha - t$ è integrabile vicino a zero

$\Rightarrow$ $F_\alpha(x)$ è continua per $x \to 0$

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0^+} F_\alpha(x) = 0$

Come tende a zero?

Per stabilire l'ordine di infinitesimo, se esiste è necessario e suff. det. $\beta \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$\lim_{x\to 0} \frac{F_a(x)}{x^\beta} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

ma $\frac{F_a(x)}{x^\beta} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow$ de l'Hospital $\lim_{x\to 0} \frac{F_a(x)}{x^\beta} \overset{?}{=}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{F_\alpha'(x)}{\beta x^{\beta-1}}$$

$$\underset{T.F.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x^\alpha - x)}{\beta x^{\beta-1}} \quad (*)$$

Risolvere det. $\beta > 0$ tale che $(*)$ sia finito e $\neq 0$

$$\operatorname{tg}(x^\alpha - x) \underset{x\to 0^+}{=} (x^\alpha - x)(1+o(1))$$

ma $x^\alpha - x = x^\alpha + o(x^\alpha)$ se $\alpha<1$

$= -x + o(x)$ se $\alpha \geq 1$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{\beta x^{\beta-1}} = L \neq 0 \quad \text{se } \alpha<1$$

$\Leftrightarrow \beta-1=\alpha \quad \beta = 1+\alpha$

$\Rightarrow$ se $\alpha<1$ $F_\alpha(x)$ ha ordine di infinitesimo $1+\alpha$

invece si ha

$$[x] = \lim_{x\to 0} \frac{-x(1+o(1))}{\beta x^{\beta-1}} = M \neq 0 \quad \text{se } \alpha \geq 1$$

se $\beta-1=1 \Rightarrow \beta=2$

$\Rightarrow$ se $\alpha\geq 1$ F_α ha ordine di infinitesimo $\beta=2$

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE CON FUNZIONI INTEGRALI?

Sappiamo che se $f \in C([a,b])$

$\Rightarrow \forall c \in (a,b)$

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

è derivabile in (a,b) e

$$F'(x) = f(x) \qquad (T.F.C)$$

se $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ e

$$\varphi \in C^1([c,d])$$

e consideriamo

$$F(\varphi(x)) = \int_c^{\varphi(x)} f(t)\,dt \Rightarrow$$

e $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$

Quindi

$$G(x) := \int_c^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{G'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)}$$

$G \in C^1([c,d])$

se $h : [c,d] \to [a,b]$

$h \in C^1([c,d])$ e $h \le \varphi$ in $[c,d]$

$$M(x) = \int_{h(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = F(\varphi(x)) - F(h(x))$$

$\Rightarrow M \in C^1([c,d])$ e

$$\boxed{M'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x) - f(h(x))\,h'(x)}$$

Esempio

$$F(x) = \int_{x(4-x)}^{0} \lg(\operatorname{arctg}(1-t))\,dt$$

$$F'(x) = -\lg[\operatorname{arctg}(1-x(4-x))] \cdot (-2x+4)$$

dove? ovviamente

$\lg(\operatorname{arctg}(1-t))$ è def per $t<1$

$\Rightarrow$ se $x(4-x)<0$ ok però potrebbe essere

$$0 < x(4-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{basta che}}}{\leq} 1 \Rightarrow \underbrace{x \in \mathbb{R} \setminus [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})}_{=\ \text{dom } F}$$

Attenzione al dominio delle funzioni integrali!

Esercizio:

Calcolare

• $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sqrt{2t^4-3t^2+1}\,dt}{\operatorname{sen} x} = (*)$

Poiché $f(t)=\sqrt{2t^4-3t^2+1}$ è

continua vanno a zero ho $\frac{0}{0}$

$\Rightarrow$ T.F.C. + DE L'Hop

$\underset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x^4-3x^2+1}}{\cos x} = 1$

•• $\lim_{x\to 0} \dfrac{e(x^2-x) + \int_0^x e^{\cos t}\,dt}{1-\cos(2x)}$

$= \frac{0}{0} \underset{\substack{\text{DE L'Hop} \\ +\text{T.F.C.}}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{e(2x-1)+e^{\cos x}}{2\operatorname{sen}(2x)}$

$= \frac{0}{0} \quad = \lim_{x\to 0} \dfrac{2xe - e + e\cdot e^{\cos x - 1}}{4x(1+o(1))}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2xe - \cancel{e} + e\left(\cancel{1} + \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + o(x^2)\right)}{4x(1+o(1))}$$

$$= \frac{2e}{4} = e/2$$

Esercizio: Mettere in ordine di infinito crescente per $x \to +\infty$

a) $x \lg x$

b) $x \int_0^x e^{-t^2} dt$

c) $x^2 \lg(\lg x)$

<u>oss</u>: b): $\int_0^x e^{-t^2} dt$ per $x \to +\infty$ tende a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt < +\infty$

$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt$ è limitato cioè $O(1)$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ b) è $O(x)$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ b) è più lento di a) che è più lento di c)

Infatti

$$\frac{a)}{c)} = \frac{x \lg x}{x^2 \lg(\lg x)} = \frac{\lg x}{x \lg(\lg x)}$$

$y = \lg x \quad y \to +\infty \quad$ se $x \to +\infty$

$$\frac{y}{e^y \lg y} \to 0 \Rightarrow x \lg x = o(x^2 \lg(\lg x))$$

l'ordine crescente è

b) a) c)

Esercizio

Det $a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{(2+\operatorname{sen} x)\, dx}{|1+x|^{1/3} (x-2)^2 |x-3|^{1/2}}$$

sia convergente

Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda $\quad f(x) > 0$

$x \to -\infty \quad f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1/3+2+4}}\right)$

e $\frac{1}{3}+2+4 > 1 \Rightarrow$ a $-\infty$ l'integrale conv.

$f(x)$ ha singolarità in $x=-1$
$x=2$
$x=3$

(cioè è illimitata per $x \to$ questi 3 punti)

$x \to -1 \qquad f(x) = O\left(\dfrac{1}{|x+1|^{1/3}}\right)$

$x \to 2 \qquad f(x) = O\left(\dfrac{1}{(x-2)^{2}}\right)$

Mentre per $x \to -1$ f ha una singolarità <u>integrabile</u> $(1/3 < 1)$

per $x \to 2$ f ha una singolarità <u>non</u> integrabile $(2 > 1)$

a questo punto l'intervallo $(-\infty, a)$ <u>non</u> può contenere il punto 2 $\Rightarrow a < 2$

Oss: Per $x \to 3$ f ha una singolarità integrabile

essendo $f(x) = O\left(\frac{1}{(x-3)^{1/2}}\right)$

$$\frac{1}{2} < 1$$

MA non essendo integrabile

vicino a 2 $\Rightarrow$ $(-\infty, a)$

non potendo contenere $x=2$

non potrà contenere $x=3$!!

Quindi

$$a < 2$$

Esercizio: Det $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{(\cos x - 3)\,dx}{(1+x)^3 (x-2)^{1/3}}$$

sia convergente

Sia $f(x)$ la funzione integranda

Consideriamo $|f(x)|$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

$$|f(x)| = O\left(\frac{1}{x^{3+1/3}}\right) \text{ per } x \to +\infty$$

$\Rightarrow$ $|f|$ è integrabile all'∞

$|f|$ è singolare per $x \to 2$
$x \to -1$

per $x \to 2$ $\quad |f| = O\left(\frac{1}{|x-2|^{1/3}}\right)$

$\Rightarrow$ è integrabile vicino a 2

per $x \to -1$ $|f| = O\left(\frac{1}{(1+x)^3}\right)$

$\Rightarrow |f|$ ~~non~~ è int.

per $x \to -1^+$

Quindi f è assolutamente int.

per $a > -1$

f? per $x \to -1^+$ $f(x)$ è int?

per $x \to -1^+$ $(1+x)^3 > 0$ $(x-2)^{1/3} < 0$

$\cos x - 3 < 0$ $\Rightarrow f > 0$ per $x \to -1^+$

$\Rightarrow$ $f = |f|$ def. per $x \to -1^+$

$\Rightarrow$ f è int. in senso improprio

per $\boxed{a > -1}$

Calcolare se esiste il polinomio di McLaurin di ordine 3 di

$$F(x)=\int_0^x \lg(1+2t+e^t)\,dt$$

Il polinomio esiste perché la funzione integranda è derivabile 2 volte in $x=0$

$\Rightarrow F$ è derivabile 3 volte in $x=0$

$F(0)=0$ $\qquad F'(0 = \lg(1+0+1) =$

$F'(x)=\lg(1+2x+e^x)$ $\qquad = \lg 2$

$$F''(x)=\frac{2+e^x}{1+2x+e^x} \qquad F''(0)=\frac{3}{2}$$

$$F'''(x)=\frac{e^x(1+2x+e^x)-(2+e^x)^2}{(1+2x+e^x)^2} \qquad F'''(0)=\frac{2-4}{4}=-2/4=-1/2$$

$$T_3(x)=(\lg 2)x+\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3!}=(\lg 2)x+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3$$

Esercizio: (Es. n° 11 foglio 5)

Det. $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. converga fattoriale seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg \sqrt{x}}{x^\alpha}\, dx$$

e calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n \frac{\arctg \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$

Sia $f(x) = \dfrac{\arctg \sqrt{x}}{x^\alpha}$ la funzione integranda

$x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{\pi/2}{x^\alpha}(1+o(1))$$

quindi, se $\alpha > 0$ f ha ordine α

allora per essere integrabile all'infinito $\alpha > 1$

Se $\alpha \le 0$ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \neq 0$

$\Rightarrow f$ non è integrabile

per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1/2}}(1+o(1))$$

per essere int. vicino a zero

$$\alpha - \frac{1}{2} < 1 \qquad \alpha < 3/2$$

Quindi f è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$

$$\iff \quad 1 < \alpha < 3/2$$

$\Rightarrow$ per $\alpha = 1/2$ $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt = +\infty$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\infty}{\infty}$$

Per applicare de l'Hopital

devo considerare la funzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = \pi$$

$\Rightarrow$ uso

che $n\to+\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt \to \pi$$