Lezioni del 07- 09 e 10gennaio 2019

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente:Alessandra Cutrì

Argomenti:serie numeriche:definizione, successione delle ridotte n-me, resto n-mo, convergenza, esempi:serie telescopica e serie di Mengoli,serie geometrica, condizione necessaria per la convergenza, criterio di Cauchy per le serie, serie armonica, serie a termini non negativi e convergenza assoluta, criterio integrale e criterio del confronto e confronto asintotico, serie armonica generalizzata, serie di 1/k(log k)^b

Argomenti:criterio del rapporto e della radice,esempi ed esercizi,

Argomenti:esempio di funzione non limitata all'infinito con integrale improprio convergente.Serie a termini di segno alterno:criterio di Leibniz,esempi

Serie Numeriche

E' una somma formale di un numero infinito di termini:

data una successione

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k\in\mathbb{R}$

che significa $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$? :

- a partire dalla successione

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ consideriamo questa

nuova successione

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$\vdots$

$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

A.Cutri 7/1/19

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: successione delle ridotte n-me

$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si chiama anche successione delle SOMME PARZIALI

OSS: s_n è una successione costruita per ricorrenza

$s_0 = a_0$

$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sim \lim_{n\to+\infty} s_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$$

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice semplicemente convergente

$\Updownarrow$

somma della serie

$\exists$ finito il $\lim_{n\to+\infty} s_n = S$

Attenzione: $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$

non il $\lim_{n\to+\infty} a_n$!!!

$$S = \lim_{n\to+\infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

. la serie si dice divergente $\Leftrightarrow S_n \to \infty$

irregolare se $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare

S si chiama SOMMA DELLA SERIE

A.Cutri 7/1/19

Se invece di partire da zero si parte da $N_0 \in \mathbb{N}$, il carattere della serie non cambia ma la somma S sì

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - (a_0 + a_1 + \dots + a_{N_0-1})$$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$ (la serie converge a S)

$$\Rightarrow \sum_{k=N_0}^{+\infty} a_k = S - (a_0 + a_1 + \dots + a_{N_0-1})$$

Si potrebbe pensare alla serie come ad una successione (quella delle ridotte n-me $\{S_n\}$) e applicare a $\{S_n\}$ le teorie svolte sui limiti di successioni MA $\{S_n\}$ spesso non è nota esplicitamente!

Quando non si riesce ad esplicitare S_n, è necessario individuare dei criteri ad hoc di convergenza per le serie che non facciano intervenire direttamente la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ per determinare il suo limite S (somma della serie)

DEF: Si chiama RESTO n-mo della serie:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

↑ la coda della serie

OSS: Se la serie converge a S

$$\Rightarrow R_n = S - S_n \longrightarrow 0$$

Vediamo alcuni esempi di serie in cui S_n è esplicitabile:

- Serie TELESCOPICHE

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{b_k - b_{k+1}}_{a_k}$$

Si determina in questo caso esplicitamente S_n e applicare la Teoria dei limiti per determinare S

$$S_n = (b_0 - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_1} - \cancel{b_2}) + \dots + (\cancel{b_n} - b_{n+1})$$

$$= b_0 - b_{n+1}$$

Quindi S_n converge

$\Longleftrightarrow$ b_n converge

ed in tal caso $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = b_0 - \lim_n b_n$

Esempio di serie Telescopica:

SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \Rightarrow (A+B)k + A = 1$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad B = -1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = 1 =: S$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

- Serie geometrica (formula esplicita per S_n)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

q: ragione della serie geometrica

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non converge (irregolare)} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

A.Cutrì 7/1/19

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ converge $\Leftrightarrow$ $|q| < 1$ e $S = \dfrac{1}{1-q}$

Per esempio

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Se invece di partire da zero, si parte da $N_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=N_0}^{+\infty} q^k = q^{N_0}+q^{N_0+1}+\dots = \frac{q^{N_0}}{1-q}$$

la serie converge $\Leftrightarrow |q|<1$

la somma però cambia!

$$S_n = \sum_{k=N_0}^{n} q^k = q^{N_0}+q^{N_0+1}+\dots+q^n \quad n \geq N_0$$

A.Cutri 7/1/19

$$= q^{N_0}\left[1+q+q^2+\dots+q^{n-N_0}\right]$$

$$= q^{N_0}\,\frac{1-q^{n-N_0+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{q^{N_0}}{1-q}$$

Condizione necessaria per la convergenza della serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
è che $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

DIM: Poichè $S_n \to S$

e $S_n = S_{n-1} + a_n$

$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$

OSS: la condizione non è sufficiente:

$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \quad k \to +\infty$

ma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$ Infatti

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$

Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$

è collegato con il fatto che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Prima abbiamo provato la divergenza della serie $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ mediante una stima su s_n.

Si potrebbe provare anche utilizzando la divergenza dell'integrale improprio

Quindi il fatto che $a_k \to 0$ è necessario ma <u>non</u> sufficiente affinché $\sum a_k$ sia convergente!

Cond. NECESSARIA e SUFFICIENTE perché (criterio di Cauchy)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{sia convergente}$$

è che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall m > N$ e $\forall p \geq 0$ $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p}|}_{|S_{m+p} - S_m|} < \varepsilon$$

Quindi questo è il criterio di Cauchy applicato alla successione $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ che è CNES affinché S_n converge!

Oss: Come per le successioni, questo criterio è comodo per provare che una serie non converge ma non per provare che converge (servirebbero fatti infiniti test)

A.Cutri 7/1/19

La serie armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

è DIVERGENTE

Infatti:

1. C.N. è verificata $\frac{1}{k} \to 0 \quad k \to +\infty$

ma questo non è suff. per la conv.

2. Consideriamo

$$\underbrace{S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ fattori}}$$

$$> \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Quindi scegliendo $\varepsilon = 1/2$ nel criterio di Cauchy e $m=p=n$, il criterio non è soddisfatto $\Rightarrow$ la serie NON converge essendo poi $a_k = \frac{1}{k} > 0$ $\Rightarrow S_n \nearrow \Rightarrow S_n \to +\infty$

Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

OSS: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$

Anche in questo caso la serie $\sum \frac{1}{k}$ e l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ hanno lo stesso comportamento

Vedremo un criterio (Criterio integrale) che stabilisce un legame tra conv. di serie e di integrali impropri

A.Cutri 7/1/19

Si riferisce a serie a termini NON NEGATIVI di tipo particolare $a_k = f(k)$ con $f \geq 0$ e definitivamente decrescente

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

(basta definitivamente ≥ 0)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{con } a_k \geq 0$$

(definitivamente per $k \to +\infty$)

$\Downarrow$

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$$

(definit. per $k \to +\infty$)

cioè S_n è monotona non decrescente

(definit. per $k \to +\infty$)

$\Downarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\Leftrightarrow$ S_n è limitata super.

$\sum a_k = +\infty$ $\Leftrightarrow$ S_n non è limitata superiormente

A.Cutri 7/1/19

CRITERIO INTEGRALE

Sia $k_0 \in \mathbb{N}$ $f : [k_0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f \geq 0$ (anche solo definitivamente per $x \to +\infty$)

f monotona <u>non crescente</u>

Allora

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k) \text{ converge (diverge)}$$

$$\Updownarrow \quad \leftarrow \text{cond. nec. e suff.}$$

$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge (diverge)}$$

<u>DIM</u>: Supponiamo $k_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots$$

A.Cutrì 7/1/19

f monotona noncrescente

$\Downarrow$

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1]$$

Quindi integrando in $(k, k+1)$

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \int_k^{k+1} f(k)\,dx$$

$$\overset{\shortparallel}{f(k+1)} \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \overset{\shortparallel}{f(k)}$$

sommando da 0 a n

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx}_{\overset{\shortparallel}{\int_0^{n+1} f(x)\,dx}} \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f(k)}_{\overset{\shortparallel}{S_n}}$$

$$j = k+1$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} f(j) = S_{n+1} - f(0)$$

quindi

$$S_{n+1} - f(0) \le \int_0^{n+1} f(x)\,dx \le S_n$$

$n \to +\infty$

A.Cutrì 7/1/19

è integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

$\Leftrightarrow \sum a_k < +\infty \Leftrightarrow$ S_n è limitata superiormente

essendo $f(k) \geq 0$ per k grande
$\Rightarrow S_n$ ↗ definitivamente

Applicazioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ è convergente}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha > 1$$

essendo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > 1$

e $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0$ e monotona decrescente in $[1, +\infty)$

Si recupera la divergenza di $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}$

e di $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Criterio del confronto

per serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{con} \quad a_k \geq 0$$

(anche solo definitiv. per $k \to +\infty$)

Se $\quad 0 \leq a_k \leq b_k$ definitiv. per $k \to +\infty$

Allora
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$$

e $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$$

Se $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{S_n} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k}_{\tilde{S}_n}$$

$S_n, \quad \leq \quad \tilde{S}_n$ (somme parziali relative a b_k)

⊕ S_n e $\tilde{S}_n$ monotone

Serie assolutamente convergenti

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

se converge la serie a termini ≥ 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

Poiché risulta

$$\left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k|$$

una serie che converge assolutamente converge anche semplicemente, il viceversa non è detto.

A.Cutrì 7/1/19

Inoltre $\sum |a_k|$ è ovviamente a termini non negativi, quindi a questa serie si possono applicare i criteri validi per serie a termini non negativi che perciò si chiamano criteri di CONVERGENZA ASSOLUTA

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Comportamento della serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{k^\alpha}$

+ criterio del confronto

$\Downarrow$

se $\exists\ c>0$ e $\alpha>1$ t.c.

$|a_k| \leq \frac{c}{k^\alpha}$ definit. per $k \to +\infty$

(in particolare se a_k ha ordine di infinitesimo $\alpha>1$ per $k \to +\infty$)

$\Downarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente

(e quindi semplicemente)

A.Cutri 7/1/19

similmente $\exists\ c>0$ e $\beta \in (0,1]$ t.c.

$a_k > \frac{c}{k^\beta}$ def per $k \to +\infty \Rightarrow \sum a_k = +\infty$

(in particolare se a_k ha ordine di infinito $\beta \leq 1$)

Attenzione: $|a_k| = o\left(\frac{1}{k}\right)$

NON implica che $\sum a_k$ sia convergente

Esempio: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\beta}$ $\beta > 0$

- $a_k = \frac{1}{k(\log k)^\beta} > 0$ per $k \geq 2$
- $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ per $k \to +\infty$
- $a_k = f(k)$ con $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\beta}$

che è monotona decrescente per $x \geq 1$ infatti

$$f'(x) = \frac{-(\log x)^\beta - \cancel{x}\,\beta(\log x)^{\beta-1}\frac{1}{\cancel{x}}}{x^2(\log x)^{2\beta}} =$$

A.Cutri 7/1/19

$$= \frac{-(\log(x))^\beta - \beta(\log x)^{\beta-1}}{x^2(\log x)^{2\beta}} < 0 \text{ per } x > 1$$

Criterio integrale

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\beta} < +\infty} \iff \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\beta} < +\infty$$

$$\iff \boxed{\beta > 1}$$

Esercizio: Studiare il comportamento di

$$\sum_{k\geq 2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\lg k)^{\beta}}$$

al variare di α e β

Vediamo se si può applicare il criterio integrale

$a_k = \frac{1}{k^{\alpha}(\lg k)^{\beta}} > 0 \quad \forall k \geq 2$

$a_k \to 0 \iff \alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ o $\alpha = 0$ $\beta > 0$

$=: f(k)$ se $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(\lg x)^{\beta}}$

• controlliamo che f sia def. monotona non crescente per $x \to +\infty$

$$f'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1}(\lg(x))^{\beta} - x^{\alpha}\beta(\lg x)^{\beta-1}\frac{1}{x}}{x^{2\alpha}(\lg x)^{2\beta}}$$

$$= \frac{-x^{\alpha-1}(\lg x)^{\beta-1}[\alpha \lg x + \beta]}{x^{2\alpha}(\lg x)^{2\beta}}$$

$$= \frac{-(\alpha \lg x + \beta)}{x^{\alpha+1}(\lg x)^{\beta+1}}$$

per $x > 2$
$x \lg x > 0$
$\alpha \lg x \to +\infty$

$\Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{R}$ $f'(x) < 0$ definitivamente se $\alpha > 0$

se $\alpha = 0$ $f' < 0$ se $\beta > 0$

Quindi se criterio integrale si applica e

$$\sum \frac{1}{k^\alpha (\lg k)^\beta} < +\infty \iff \begin{cases} \alpha > 1 & \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1 & \beta > 1 \end{cases}$$

se $\alpha < 1$ $\sum = +\infty \ \forall \beta$

(visto che $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\lg x)^\beta} dx < +\infty \iff \begin{cases} \alpha > 1 & \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1 & \beta > 1 \end{cases}$)

Vediamo ora altri criteri di convergenza assoluta:

- Criterio del rapporto
- Criterio della radice

Criterio del rapporto

riguardante serie a termini non negativi ~ criterio di convergenza assoluta per la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Se

1. $a_k \neq 0$ definitivamente per $k \to +\infty$

2. $\exists\, q \in (0,1)$ t.c.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \quad \text{definitivamente per } k \to +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge ASSOLUTAMENTE}$$

(quindi anche semplicemente)

A.Cutrì 9/1/19

OSS: l'ipotesi $a_k \neq 0$ definitiv. $k \to \infty$ ~ ha senso fare $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ definitiv. $k \to +\infty$

Dim: Ipotesi 2.

$\Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \quad \forall k \geq k_0 \qquad q \in (0,1)$$

$\Downarrow$

$$|a_k| \le q\,|a_{k-1}| \le q^2\,|a_{k-2}| \le \dots \le$$

$$\le q^{k-k_0}\,|a_{k_0}|$$

e poiché

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} |a_{k_0}|\, q^{k-k_0} = |a_{k_0}| \sum_{k=k_0}^{+\infty} q^{k-k_0}$$

$$\underset{j=k-k_0}{=} |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

essendo $q \in (0,1) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} q^j < +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{+\infty} |a_{k_0}|\, q^{k-k_0} < +\infty$$

A.Cutri 9/1/19

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$$ criterio del confronto

Se invece

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ definitivamente per $k \to +\infty$

$\Rightarrow \sum a_k$ non converge

Perché

$|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \dots \geq |a_{k_0}|$

$\forall k > k_0$

$\Downarrow$

$\lim_{k \to +\infty} |a_k| \geq |a_{k_0}| \neq 0$

(1.)

non vale quindi la condizione necessaria di convergenza

oss se in particolare

$\exists \lim_{k \to +\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$

A.Cutri 9/1/19

Allora

$L < 1 \Rightarrow \sum |a_k| < +\infty$

$L > 1 \Rightarrow \sum |a_k| = +\infty$

$L = 1$??

Se $L=1$ non si può concludere nulla

<u>OSS</u>: se definitivamente che
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \quad \text{con } q \in (0,1)$$
la serie conv. assolutamente

se
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \text{def.} \quad (\ast)$$
NON SI CONCLUDE NULLA!!

$$A = \left\{ \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| ; k \in \mathbb{N} \text{ maggiori } k \ge k_0 \right\}$$
nel primo caso $\sup A \le q < 1$
nel secondo caso $\sup A \le 1$
(può essere anche 1!)

Vediamo degli esempi che evidenziamo come da (**) non si possa concludere nulla:

Consideriamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} \to 1 = L \quad \forall \alpha$$

$$+ \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \forall k \qquad \forall \alpha$$

ma sappiamo che la serie converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\Rightarrow$ (**) non consente di dedurre nulla essendo vera $\forall \alpha > 0$ quindi sia per serie divergenti che per serie convergenti!!

A.Cutri 9/1/19

Esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $<+\infty$ infatti

$a_k = \frac{1}{k!} > 0$

$$0 \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} \to 0 = L$$

$\Rightarrow$ per il criterio del rapporto

$\sum \frac{1}{k!}$ converge

Esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} < +\infty$

infatti

$a_k = \frac{k!}{k^k} > 0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{(k+1)!}^{\,k+1}}{(k+1)^{\cancel{k+1}\,k}} \frac{k^k}{\cancel{k!}}$$

$$= \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k \to \frac{1}{e}$$

$L = 1/e < 1 \Rightarrow \sum \frac{k!}{k^k} < +\infty$

A.Cutri 9/1/19

Criterio della Radice

Riguarda serie a termini NON negativi, quindi si può considerare come un criterio di convergenza assoluta per la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Se $\exists\, q \in (0,1)$ tale che

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \text{definitivamente per } k \to +\infty$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge ASSOLUTAMENTE}$$

A.Cutri 9/1/19

DIM

da $\sqrt[k]{|a_k|} < q$ definit. $k \to +\infty$

$\Rightarrow |a_k| < q^k$ con $q \in (0,1)$

$\Rightarrow \sum |a_k| < +\infty$ per confronto !

se $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ per infiniti indici k

$\Rightarrow \sum a_k$ NON CONVERGE

DIM $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Rightarrow |a_k| \geq 1$ per infiniti k

$\Rightarrow a_k \not\to 0$ CN non è soddisfatta

OSS se esiste $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$

Allora

se $L < 1$ $\Rightarrow$ la serie conv. assol.

se $L > 1$ $\Rightarrow$ la serie non converge

se $L = 1$ NON SI SA

CRITERIO DELLA RADICE PIÙ POTENTE DI QUELLO DEL RAPPORTO

Vediamo un esempio in cui il criterio della radice permette di determinare il comportamento della serie e quello del rapporto no:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2+(-1)^k}{5}\right)^k}_{a_k}$$

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^k & \text{se } k \text{ è pari} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^k & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$a_k > 0$

$\Rightarrow \quad \sqrt[k]{a_k} \leq \frac{3}{5} = q \qquad \forall k$

$q \in (0,1) \quad \Rightarrow$ la serie converge

facendo

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \left(\frac{5}{3}\right)^k = \frac{1}{5\,3^k} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} 5^k = \frac{3^{k+1}}{5} & k \text{ disp.} \end{cases}$$

A.Cutri 9/1/19

NON SI CONCLUDE NULLA

Esercizio

Studiare il comportamento delle serie seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1-\sqrt{e}\left(\cos\frac{1}{k}\right)^{k^2}$$

$$a_k = 1-\sqrt{e}\left(\cos\frac{1}{k}\right)^{k^2} =$$

$$= 1-\sqrt{e}\, e^{k^2 \lg\left(\cos\frac{1}{k}\right)}$$

$$= 1- e^{\frac{1}{2}+k^2\lg\left(\cos\frac{1}{k}\right)}$$

Se $k\to+\infty$ cosa fa

$k^2\lg\left(\cos\frac{1}{k}\right)$? $\quad \infty\cdot 0$

$$\cos\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

$$\lg\left(\cos\frac{1}{k}\right) = \lg\left(1-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)+o\left(\frac{1}{k^2}\right) \Rightarrow k^2\lg\left(\cos\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{2}+o(1)$$

$$\leadsto a_k = 1 - e^{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + o\left(\frac{1}{k}\right)} = 1 - 1 + o(1)$$

$\Rightarrow a_k \to 0$ nemmeno di sì come

ma se ha segno definitivamente costante!

Dunque andiamo avanti con lo sviluppo

$$\cos\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!\,k^4} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

$$\lg\left(\cos\frac{1}{k}\right) = \lg\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!\,k^4} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)\right)$$

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$= -\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{4!\,k^4} + o\left(\frac{1}{k^5}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4k^4} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2k^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)\frac{1}{k^4}}_{-\frac{1}{12}\frac{1}{k^4}} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

A.Cutri 9/1/19

$$\Rightarrow a_k = 1 - e^{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{12k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{12k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{12k^2}(1+o(1)) \quad k \to +\infty$

$\Rightarrow a_k \geq 0$ definitivamente per $k \to +\infty$

$+ \; a_k$ ha ordine di infinitesimo

$\alpha = 2$ rispetto a $\frac{1}{k}$

$\Rightarrow$ criterio del confronto asintotico

$\sum a_k < +\infty$

A.Cutri 9/1/19

Esercizio: studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k \operatorname{sen}\frac{1}{k}\right)^{k^3}$$

$$a_k = \left(k \operatorname{sen}\frac{1}{k}\right)^{k^3}$$

essendo $\operatorname{sen}\frac{1}{k} > 0$ definitivamente per $k \to +\infty$

$\Rightarrow a_k > 0$ definitivamente

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(k \operatorname{sen}\frac{1}{k}\right)^{k^2} =$$

$$k \operatorname{sen}\frac{1}{k} = k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{6k^2} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a_k} = e^{k^2 \lg\left(k \operatorname{sen}\frac{1}{k}\right)} =$$

$$= e^{k^2 \lg\left(1 - \frac{1}{6k^2} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{6} + o(1)}$$

$\to e^{-1/6} < 1 \Rightarrow$ serie converge!

Esercizio: Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{1+k^2x^2} - \frac{(k+1)x}{1+(k+1)^2x^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$

fissato $x \in \mathbb{R}$, questa è una serie del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1} \quad \text{con}$$

$$b_k := \frac{kx}{1+k^2x^2}$$ ⇝ serie telescopica

$$S_n = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - \cancel{b_4} + \cancel{\dots} + \cancel{b_n} - b_{n+1}$$

$$= b_1 - b_{n+1}$$

e $b_k \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la serie converge a $S = b_1 = \dfrac{x}{1+x^2}$

A.Cutri 9/1/19

Esercizio: Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|2x+3|^{k^2}}{k!} \quad (*)$$

$$a_k = \frac{|2x+3|^{k^2}}{k!} > 0$$

Vediamo con il criterio del rapporto:

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|2x+3|^{(k+1)^2}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|2x+3|^{k^2}}$$

$$= \frac{1}{k+1} |2x+3|^{(k+1)^2-k^2=2k+1}$$

A.Cutri 9/1/19

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } |2x+3| \leq 1 \\ +\infty & \text{se } |2x+3| > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(*)$ conv. $\Leftrightarrow$ $|2x+3| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-2,-1]$

Visto che $|2x+3| \leq 1 \iff$

$-1 \leq 2x+3 \leq 1$

$\Downarrow$ $2x \leq -2$ $x \leq -1$

e $2x \geq -4$ $\Rightarrow x \geq -2$

cioè $x \in [-2, -1]$

Esempio di funzione NON limitata all'infinito ma con integrale improprio convergente

Abbiamo già visto che se

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste ed è uguale L

e se $\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| < +\infty$

$\Rightarrow L = 0$

Infatti se fosse $L \neq 0$, p.e. $L > 0$

A.Cutri 10/1/19

si avrebbe definitivamente per $x \to +\infty$

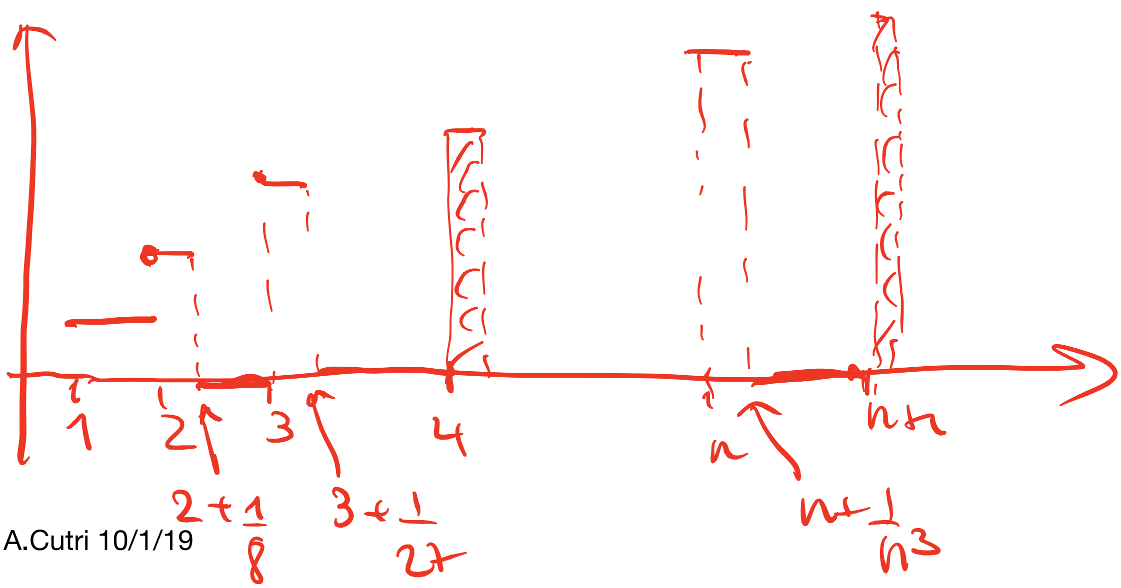
$\forall \varepsilon > 0$

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \quad \forall x > k_0$

$$\underbrace{\Rightarrow (L-\varepsilon)\int_{k_0}^{+\infty} dx}_{+\infty} < \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx < (L+\varepsilon)\int_{k_0}^{+\infty} dx = +\infty \qquad \varepsilon = L/2$$

Però esistono funzioni definitivamente NON limitate, che non ammettono limite per $x \to +\infty$ ma che hanno integrale improprio convergente ecco:

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } x \in \left[n, n+\frac{1}{n^3}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} n\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Serie a termini di segno alterno

Abbiamo visto che la convergenza assoluta di una serie implica la convergenza semplice

E' vero il viceversa? NO

Infatti la serie armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty \qquad (*)$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \quad \text{converge}$$

termine generico di

Oss che se $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$

$\Rightarrow |a_k| = \frac{1}{k}$ termine generico di $(*)$

Come si dimostra che

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ converge?}$$

Segue dal criterio di Leibniz che si applica per studiare la convergenza di serie numeriche con termini di segno che si alterna cioè del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{con } \boxed{a_k \geq 0} \ \forall k$$

$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

Criterio di LEIBNIZ

Consideriamo la serie della forma $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

$a_k \geq 0 \quad \forall k$

(serie a termini di segno alterno)

Supponiamo che

1. $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

(c.N. verificata)

2. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \geq k_0$$

(quindi a_k è definitivamente monotona non crescente)

Allora $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge semplicemente

ed inoltre

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ verifica}$$

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \text{se } 2n \geq k_0$$

$$\text{e } |S - S_n| = |R_n| \leq a_{n+1} \ \forall n \geq k_0$$

Dim: Supponiamo $k_0 = 0$

$\Rightarrow a_k \downarrow$ e $a_k \to 0$, $a_k \geq 0 \ \forall k$

$\Downarrow$

$S_{2n} \downarrow$ e $S_{2n} \geq S_1$

$S_{2n+1} \nearrow$ e $S_{2n+1} \leq a_0 = S_0$

Infatti

$$S_0 = a_0 \quad S_1 = a_0 - a_1 \leq S_0$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq S_{2n}$$

$a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$

$\Rightarrow S_{2n} \searrow$.

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq S_{2n-1}$$

≥ 0 perché $a_{2n} \geq a_{2n+1}$

$\Rightarrow S_{2n+1} \nearrow$

Inoltre $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}$

Quindi essendo $S_{2n} \searrow$

$$S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq \dots \leq S_0 = a_0$$

quindi S_{2n+1} è $\nearrow$ e limitata superiormente da $S_0 = a_0$

A.Cutri 10/1/19

Mentre che $S_{2n+1} \le S_{2n}$

$S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq S_{2n-1} \geq \dots \geq S_1$

essendo $S_{2n+1} \nearrow$

Quindi $S_{2n} \searrow$ e lì è limitata inf. da S_1

Perciò $S_{2n} \to \inf(S_{2n})$ $n \to +\infty$

$S_{2n+1} \to \sup(S_{2n+1})$ $n \to +\infty$

$$|\inf(S_{2n}) - \sup(S_{2n+1})|$$

$$\le |S_{2n} - S_{2n+1}| = |a_{2n+1}| \to 0$$

$\inf(S_{2n}) = \sup(S_{2n+1}) = S$

$\Rightarrow$ $S_{2n} \to S^+$ $S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$

$S_{2n+1} \to S^-$

Somme "pari" tendono a S per eccesso

le somme "dispari" tendono a S per difetto

$S = \inf S_{2n} = \sup S_{2n+1}$

$\Rightarrow \sum (-1)^k a_k$ converge

Dimostrare $|S - S_n| \le a_{n+1}$ $\forall n$

infatti

$$0 \le S - S_{2n-1} \le S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$$

e $0 \le S_{2n} - S \le S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1}$

$= a_{2n+1}$

$$|S - S_{2n-1}| \le a_{2n}$$

e $|S - S_{2n}| \le a_{2n+1}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{|S - S_n|}_{|R_n|} \le a_{n+1}$ $\forall n$

(resto ennesimo)

<u>Oss</u>: $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ converge perché

$\frac{1}{k} \to 0$ $k \to +\infty$

$\frac{1}{k} \downarrow$; $\frac{1}{k} > 0$ $\Rightarrow$ CRIT. Leibniz $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ converge

Esercizio Studiare la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+\cos k} \qquad (*)$$

$$a_k := \frac{1}{2k+\cos k} > 0 \quad \forall k \geq 1$$

e $a_k \to 0 \qquad a_k = O\left(\frac{1}{2k}\right)$

$\Rightarrow \sum a_k$ diverge quindi la

$(*)$ non converge assolutamente

Vediamo se $(*)$ converge semplicemente

$a_k > 0 \;,\; a_k \to 0 \;,\; a_k \downarrow ?$ def.?

$$f(x) = \frac{1}{2x+\cos x} \qquad f'(x) = \frac{-2+\operatorname{sen} x}{(2x+\cos x)^2} < 0$$

$\Rightarrow a_k = f(k) \downarrow \Rightarrow$ la serie $(*)$ conv. semplicemente

A.Cutrì 10/1/19

<u>Oss</u>: Nel criterio di Leibniz la monotonia (decrescenza) di a_k almeno definitivamente non può essere eliminata.

Infatti, consideriamo la serie $(*)\sum_{k\geq 1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{\sqrt{k}+(-1)^k}{k}\right]$

$$a_k := \frac{\sqrt{k}+(-1)^k}{k} \geq 0 \ \forall k \geq 1$$

$a_k \to 0 \quad k \to +\infty$

però la serie $(*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum \frac{1}{\sqrt{k}}$

<u>non</u> converge infatti $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$

e $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ converge $\Rightarrow$ somma <u>non</u> converge

L'unica ipotesi del criterio di Leibniz che non è soddisfatta da a_k è l'essere monotona non crescente almeno definit.

infatti

$$a_k = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}}_{\text{decresce}} + \underbrace{\frac{(-1)^k}{k}}_{\text{non è monotona}}$$

$\Rightarrow a_k$ non è definit. $\downarrow$

<u>Esercizio</u>: Studiare il carattere della serie seguente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{k} =: \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

$a_k = k^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{k}$ (>0 definit. per $k \to +\infty$)

$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k^{1-\alpha}}(1+o(1))$

Quindi

se $1-\alpha > 1$ cioè $\alpha < 0 \Rightarrow (*)$ conv. assolut. e quindi anche semplic.

Se $1-\alpha \leq 1$ non ho conv. assoluta
$\alpha \geq 0$

vediamo se c'è conv. semplice

<u>oss</u>: se $\alpha \geq 1$ $|a_k| \not\to 0$
$\Rightarrow$ la serie NON conv.

A.Cutri 10/1/19

Se $0 \le \alpha < 1$ C.N. è soddisfatta perché $a_k \to 0$

è monotona $\downarrow$ definitivamente?

$a_k = f(k)$

$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

$$\left(x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^\alpha \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$$

per $x \to +\infty$ $$= \alpha x^{\alpha-1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3!\,x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x^{\alpha-2}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$= x^{\alpha-2}\left(\alpha - 1 + o(1)\right) < 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

se $\alpha < 1$

Quindi per $\alpha \in [0,1)$ la serie conv. semplicemente e non assolut.

A.Cutri 10/1/19

Esercizio: Studiare il comport. di

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\log(e^{2k}+4)}{k^{5/2}+k\log k+3} \cdot \cos\left(\frac{k^3+1}{k^2+3}\right)}_{a_k}$$

a_k non è a termini ≥ 0

né a termini di segno alterno

in quanto $\frac{k^3+1}{k^2+3} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{k^3+1}{k^2+3}\right)$ oscilla

$\Rightarrow$ non si può applicare il criterio di Leibniz, e gli altri criteri sono di conv. assoluta. Vediamo se la serie converge assolutamente

$$|a_k| \leq \frac{\log(e^{2k}+4)}{k^{5/2}+k\log k+3} =: b_k$$

$$b_k = \frac{\lg(e^{2k}+4)}{k^{5/2}+k\lg k+3} = \frac{\lg(e^{2k}(1+4e^{-2k}))}{k^{5/2}(1+o(1))}$$

$$= \frac{2k+\lg(1+e^{-2k})}{k^{5/2}(1+o(1))} = \frac{2k+o(1)}{k^{5/2}(1+o(1))}$$

$$= \frac{1}{k^{3/2}}(c+o(1))$$

$\Rightarrow |a_k| = O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \quad 3/2 > 1$

$\Rightarrow \sum |b_k| < +\infty \Rightarrow$ per confronto

$\sum |a_k| < +\infty \Rightarrow$ la serie conv. assolut. e dunque semplicemente