Lezioni del 6 e 10 dicembre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente:Alessandra Cutrì

Argomenti:Calcolo integrale per funzioni reali di variabile reale:integrale per sostituzione, esempi, formule ricorsive per integrali, integrazione di funzioni razionali: fratti semplici(discussione completa se denominatore è un polinomio di grado due). esempi

Argomenti:integrazione funzioni razionali(denominatore pol.di grado n),scomposizione di Hermite, formula ricorsiva per int. di (1+x^2)^m, funzioni razionali negli argomenti sinx,cosx,tgx (sostituzioni t=tg x/2)

Metodi di integrazione

- Integrazione per PARTI

si deduce dalla formula di derivazione del prodotto di funzioni:

Siano f, g derivabili in (a,b) con derivate continue in $(a\ b)$

$$\Rightarrow \left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Downarrow$$

le primitive di $\left(f(x)g(x)\right)'$ sono

A.Cutri 5/12/18

$$\underbrace{\int \left(f(x)g(x)\right)'dx}_{f(x)g(x)+c} = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

si scarica le derivate da f a g

La versione per gli integrali definiti è:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

ES:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$f'(x) = e^x \rightsquigarrow f(x) = e^x$
$g(x) = x \rightsquigarrow g'(x) = 1$

oss: se avessimo scelto

$f'(x) = x \rightsquigarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$
$g(x) = e^x \rightsquigarrow g'(x) = e^x$

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

↑ più difficile

A.Cutri 5/12/18

ES:

$$\int \lg x\, dx = \int 1 \cdot \lg x = x \lg x - \int 1 dx$$
$$= x\lg x - x + C$$

$f'(x) = 1 \rightsquigarrow f(x) = x$
$g(x) = \lg x \rightsquigarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_2^5 xe^x\,dx = xe^x\Big|_2^5 - \int_2^5 e^x\,dx =$$

$$= 5e^5 - 2e^2 - e^x\Big|_2^5 =$$

$$= 5e^5 - 2e^2 - e^5 + e^2 = xe^x - e^x\Big|_2^5$$

oss: In generale per integrali tipo

$$\int P_n(x)\, e^x\,dx = P_n(x)e^x - \int e^x P_n'(x) = (*)$$

↑ polinomio di grado n

Poiché $P_n'(x)$ ha grado $= n-1$

Se derivo n-volte un pol. di grado n

ottengo una costante

$\Rightarrow$ $g(x) = P_n(x)$

$f'(x) = e^x$

$$(*) = \left(P_n(x) - P_n'(x)\right)e^x + \int e^x \underbrace{P_n''(x)}_{gr\ n-2} = \dots$$

$g(x) = P_n'(x)$

$f(x) = e^x$ $\quad = \dots$

$= \dots + \int e^x\,dx$

$= \dots + e^x + C$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Es

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx =$$

$g(x) = x$ $\quad = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

$f'(x) = \operatorname{sen} x$

oss: se avessimo scelto $f'(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\, dx$$

di più difficile

A.Cutri 5/12/18

Es:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)\, dx =$$

$f'(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$

$g(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

$$\Rightarrow \quad 2\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + C$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen}x\cos x\right) + C$$

<u>OSS</u>: se andassi avanti nell'integrare per parti servendo

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cos x\,dx = \operatorname{sen}x\cos x + \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

avrei $0 = 0$ $\rightsquigarrow$ non ottengo nulla

(è come fare un'operazione e per tornare indietro con la inversa)

Es: verificare che

A.Cutri 5/12/18

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \operatorname{sen}x\cos x\right) + C$$

<u>Es</u>:

$$\int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{\cos x}_{g} = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen}x\,dx$$

$f' = e^x$

$g = \cos x$

$$= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen}x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos x + \operatorname{sen}x\right) + C$$

Integrazione per sostituzione

Supponiamo di voler calcolare

$$\int_0^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$$

Cerchiamo una primitiva di

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Se ponessimo $t = \sqrt{x}$ cioè

$x = t^2$ che succederebbe?

$x = 0 \Rightarrow t = 0$ $\qquad \int_0^{\sqrt{2}} e^t \boxed{?}$

$x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2}$

che succede al dx? va espresso in termini della nuova variabile t!

A.Cutri 6/12/18

Sia dunque $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
$f\in C([a,b])$
e sia F una primitiva di f in $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Se poniamo $x=\varphi(t)$
(nell'esempio precedente $\varphi(t)=t^2$)

$\varphi:[c,d]\to[a,b]$ $\quad \varphi\in C^1([c,d])$

e tale che $\varphi([c,d])=[a,b]$
(in modo che $\exists\, \alpha,\beta\in[c,d]:\ \varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$)

A.Cutri 6/12/18

[nell'esempio prec. $\alpha=0$ $\beta=\sqrt{2}$]

$\Rightarrow F\circ\varphi$ cioè $F(\varphi(t))$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Infatti

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

dove $\varphi(\alpha)=a$ e $\varphi(\beta)=b$

<u>Oss</u>: se φ è iniettiva

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

A.Cutri 6/12/18

Formalmente ponendo $x=\varphi(t)$
$\leadsto dx = \varphi'(t)\,dt$

Analogamente per gli integrali indefiniti

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Allora

$$\int_0^2 e^{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{x=t^2=\varphi(t)\\ dx=2t\,dt}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} e^t\, 2t\,dt \overset{p.parti}{=} 2te^t\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2e^t\,dt$$

$$= 2te^t - 2e^t\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e^{\sqrt{2}} + 2$$

Esempi

1. $$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{\cancel{t}}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt$$

A.Cutri 6/12/18

$$e^x = t \qquad x = \log t = \varphi(t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}$$

$$= \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t \Big|_1^e$$

$$= \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$$

OSS: Si può anche cercare una primitiva di $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ con il metodo di sostituzione cioè

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \operatorname{arctg} e^x + c$$

e poi calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \operatorname{arctg} e^x \Big|_0^1$$

(senza modificazioni)

2. $\int \frac{\lg x}{x} dx$

oss : $\frac{1}{x} = (\lg x)'$

$\rightsquigarrow$ integrale del tipo $\int f(x) f'(x) dx$

ponendo $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x) dx$

$\rightsquigarrow \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(f(x))^2}{2} + C$

nell'esempio $t = \lg x \rightsquigarrow x = e^t$

$dx = e^t dt$

$$\int \frac{\lg x}{x} dx = \int \frac{1}{\cancel{e^t}} t \cancel{e^t} dt = \frac{t^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\lg x)^2}{2} + C$$

Attenzione

$$\int (f(x))^\gamma f'(x) dx \underset{\substack{t = f(x) \\ dt = f'(x)dx}}{=} \int t^\gamma dt = \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1} + C \qquad \gamma \neq -1$$

$$= \frac{(f(x))^{\gamma+1}}{\gamma+1} + C$$

A.Cutri 6/12/18

se $\gamma = -1$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lg|f(x)| + c$$

" $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \lg|t| =$$

3. $$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos x}\,dx = -\lg|\cos x| + c$$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\operatorname{sen} x\,dx$

4. $$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \lg|x-1| + c$$

A.Cutri 6/12/13

$x - 1 = t \quad dx = dt$

$(x = t+1)$

5. $$\int \arcsin x\,dx \underset{\text{p.p.}}{=} x \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{\overset{dt}{\overbrace{2x\,dx}}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$$= x \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-t)^{1/2}}$$

$$= x \arcsin x - \frac{1}{2}\,2\,(1-x^2)^{1/2} + c$$

6. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int \underset{\underset{(x^2)'}{\parallel}}{2x} e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^t dt$

$t = x^2 \quad dt = 2x\,dx$ $\qquad = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

Formule ricorsive per integrali:

A.Cutri 6/12/18

Vogliamo calcolare

$I_m = \int (\sin x)^m dx \qquad m \in \mathbb{N}$

Sappiamo che $I_0 = x + c$

$I_1 = -\cos x + c$

Possiamo calcolare I_m noti I_{m-1} e I_{m-2} se $m \geq 2$?

Sì con un metodo ricorsivo!

Vediamo come:

$I_m = \int \underset{\underset{g}{\parallel}}{(\operatorname{sen} x)^{m-1}} \underset{\underset{f'}{\parallel}}{\operatorname{sen} x}\, dx \overset{P.P.}{=}$

$-(\operatorname{sen} x)^{m-1} \cos x + (m-1)\int (\operatorname{sen} x)^{m-2} \underset{\underset{(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\parallel}}{\cos^2 x}\, dx$

$= -\cos x\,(\operatorname{sen} x)^{m-1} + (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$

Cioè:

$$I_n = -\cos x\,(\operatorname{sen} x)^{n-1} + (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n$$

A.Cutri 6/12/18

$$\Downarrow$$

$$(\cancel{1}+n-\cancel{1})\,I_n = -\cos x\,(\operatorname{sen} x)^{n-1} + (n-1)\,I_{n-2}$$

$$\Downarrow$$

$$I_n = \frac{-\cos x\,(\operatorname{sen} x)^{n-1}}{n} + \frac{(n-1)}{n}\,I_{n-2}$$

p.e. $I_2 = \dfrac{-\cos x \operatorname{sen} x + x}{2}$ già calcolato

Posso poi calcolare ricorsivamente

$I_3,\ I_4,\ I_5 \ldots$ etc.

Integrazione di funzioni razionali $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi

- se è $gr\, P(x) \geq gr\, Q(x)$

si deve prima eseguire la divisione in modo che grado numeratore < grado denom.

$$\frac{P}{Q} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Esempio

$$\int \frac{x^3+x}{x^2+x+1}\,dx$$

A.Cutri 6/12/18

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,0x^2 & +\,x & +\,0 & x^2+x+1 \\
-x^3 & -\,x^2 & -\,x & & x-1 \\
\hline
0 & -x^2 & 0 & 0 & \\
 & +x^2 & +x & +1 & \\
\hline
 & // & x & +\,1 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+x}{x^2+x+1} = \underbrace{(x-1)}_{S(x)} + \frac{\overbrace{x+1}^{R(x)}}{\underbrace{x^2+x+1}_{Q(x)}}$$

$$\int \frac{x^3+x}{x^2+x+1}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} + \int$$

gr P < gr Q

Quindi vogliamo calcolare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad gr\,P(x) < gr\,Q(x)$$

A.Cutri 6/12/18

1 caso: denominatore Q(x) pol. di 1° grado ⇒ non è costante

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x+\frac{b}{a}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a} \lg\left|x+\frac{b}{a}\right| + c$$

2. caso denominatore Q(x) è un polinomio di grado 2

⇒ 3 situazioni che dipendono dalle radici di Q(x)

(a) $Q(x)$ ha 2 radici reali distinte $\left(\Leftrightarrow \text{discr}\, Q(x) > 0 \right)$

(b) $Q(x)$ ha 1 radice (quadrato perfetto) $\Leftrightarrow$ $\text{discr}\, Q = 0$

A.Cutri 6/12/18

(c) $Q(x)$ non ha radici reali $(\text{discr}\, Q < 0) \Leftrightarrow Q$ è irriducibile

<u>oss</u>: caso dell'esempio è (c)
x^2+x+1 $\quad$ $\text{discr} = 1-4 < 0$

$P(x)$ può avere grado 0 o zero

Discutiamo le situazioni (a)(b)(c) con degli esempi

Esempio caso 2. (a))

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}\,dx$$

$x^2+x-6=0 \qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

A.Cutri 6/12/18

$\Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$$\int \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

si riduce il quoziente in fratti semplici cioè si determinano

A e B t.c.

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

A e B soddisfano: $\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$

$A+B=1 \qquad \Rightarrow A=1-B \qquad \Rightarrow A=4/5$

$3A-2B=2 \qquad \Rightarrow 3-3B-2B=2 \qquad \Rightarrow B=1/5$

Quindi

$$\int \frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \int \frac{4/5}{x-2}\,dx + \int \frac{1/5}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{4}{5}\lg|x-2| + \frac{1}{5}\lg|x+3| + c$$

$$x \neq 2,\ x \neq -3$$

Potrò fare integrale definito su intervalli che non contengono i punti $x=2$, $x=-3$

$\deg Q(x) > 0 \rightsquigarrow$ integrale di tipo logaritmo

A.Cutri 6/12/18

Esempio caso 2(b)

(discr $Q(x)=0$)

$$\int \frac{x+1}{9x^2+12x+4}\,dx$$

$$9x^2+12x+4=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{9}=-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 9x^2+12x+4=9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=(3x+2)^2$$

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}\,dx \qquad x\neq -2/3$$

sostituzione $3x+2=t$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{t-2}{3} \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{3}\,dt$$

$$\int \frac{\frac{t-2}{3}+1}{t^2}\,\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{9}\int \frac{t+1}{t^2}\,dt \qquad =\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$$

$$=\frac{1}{9}\log|3x+2|-\frac{1}{3x+2}+C$$

Esempio caso 2(c)

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

(è la parte rimasta in sospeso nel 1° es.)

<u>OSS</u>: Poiché sappiamo calcolare

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \lg|f(x)|+c$$

e sapendo che $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$y=\frac{x}{a}$

$dy=\frac{dx}{a}$

facciamo in modo che a numeratore compaia la derivata del denom.

Cioè, in tal caso, $2x+1$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}$$

costante

$\frac{1}{2}\lg|x^2+x+1| + c$

rimane

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \qquad (x+c)^2+d$$

(spezzare il quadrato

$$x^2+1\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

y

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}}$$

$$y = x+\frac{1}{2} \Rightarrow dy = dx \qquad \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}y\right)^2\right]} \qquad z=\frac{2}{\sqrt{3}}y \quad dz=\frac{2}{\sqrt{3}}dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c$$

$\rightarrow$ di tipo arctg

A.Cutri 6/12/18

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\lg|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c$$

Esercizio

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+4} = I$$

$x^2+2x+4=0$ mai (in $\mathbb{R}$) discorso

$$\frac{x}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2-2}{x^2+2x+4}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+4}$$

$$\frac{1}{2}\lg\left|x^2+2x+4\right| + c \qquad (*)$$

$$(*) = \int \frac{dx}{\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$$= \int \frac{dx}{3\left[1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\lg(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Esercizio

1) $$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{1}{t}\,\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$e^x = t \Rightarrow x = \lg t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

2) $$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = \int \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cancel{\operatorname{sen} x} \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cancel{\cos x}} \right) dx$$

modo più semplice per farlo

$$\boxed{1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = -\lg|\cos x| + \lg|\operatorname{sen} x| + C$$

$$= \lg|\operatorname{tg} x| + c$$

A.Cutri 10/12/18

3) $$\int \operatorname{arctg} x \underset{\text{p.p.}}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg|1+x^2| + C$$

4) $$\int \frac{\text{sen}\,x \cos^3 x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx = I$$

$$\cos^3 x = \cos x \, \cos^2 x$$

$$(\text{sen}^2 x)' = 2\,\text{sen}\,x \cos x$$

$d\,\text{sen}^2 x = dt$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x \, \cos^2 x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx$$

$$t = \text{sen}^2 x \implies dt = 2\,\text{sen}\,x \cos x \, dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{1+t}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{t-1+2-2}{t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{2}{t+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - 2\lg|t+1|\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\text{sen}^2 x - 2\lg(1+\text{sen}^2 x)\right) + c$$

Vediamo come si può calcolare

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

1° metodo : per parti

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$\rightarrow (\arcsin x)'$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int (1-x^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C$$

2° metodo : per sostituzione

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int |\cos t| \cos t\,dt \underset{\text{se } \cos t > 0}{=}$$

$x = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$

(oppure $x = \cos t \Rightarrow dx = -\operatorname{sen} t\,dt$)

$$= \frac{1}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

A.Cutri 10/12/18

Integrazione delle funzioni razionali $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ gr $P <$ gr Q

$Q(x)$ polinomio di grado n

1. caso: $Q(x)$ ha radici reali tutte di molteplicità 1

Es: $\displaystyle\int \frac{3x^2-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

$$x^3+x^2-2x = x\left(x^2+x-2\right) = x(x+2)(x-1)$$

ha radici $x=-2$, $x=1$

$$\int \frac{3x^2-6}{x(x+2)(x-1)}\,dx$$

metodo dei fratti in questo caso:

$$\frac{3x^2-6}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

Dobbiamo det. A, B, C

$$\frac{3x^2-6}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)}$$

$A+B+C=3 \Rightarrow B+C=0 \Rightarrow C=-B$
$\Rightarrow C=-1$

$A-B+2C=0 \qquad 3-B-2B=0 \quad B=1$

$-2A=-6 \Rightarrow A=3$

$$\int \frac{(3x^2-6)}{x(x+2)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= 3\lg|x| + \lg|x+2| - \lg|x-1| + C$$

$$= \lg\left|\frac{(x+2)x^3}{x-1}\right| + C$$

2. Q ha radici reali di molteplicità 1

+ radici complesse coniugate di molteplicità 1 $\rightsquigarrow$ polinomio di 2° gr. irriducibile in $\mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow$ ha 2 radici complesse coniugate)

Es. caso 2 :

$$\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}\,dx$$

$x^3-1=(x-1)\,(x^2+x+1)$

$\uparrow$ pol. 2° grado irriducibile in $\mathbb{R}$ (ha 2 radici complesse coniugate)

$$\Rightarrow \frac{4x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x^3-1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=4 & \Rightarrow 1+C+2C=4 \Rightarrow C=1 \\ A-B+C=1 & \cancel{1}+2C-B=\cancel{1} \Rightarrow B=2C \Rightarrow B=2 \\ A-C=1 & \Rightarrow A=1+C \Rightarrow A=2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\int \frac{(4x^2+x+1)\,dx}{x^3-1} = \int \frac{2\,dx}{x-1} + \int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1}$$

$$= 2\lg|x-1| + \lg|\overbrace{x^2+x+1}^{>0}| + c =$$

$$= \lg\left[(x-1)^2(x^2+x+1)\right] + c$$

3. $Q(x)$ ha radici multiple reali:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$

$$(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(Ax-A)(x^2+2x+1) + B(x^2+2x+1) + (Cx+C)(x^2-2x+1) + D(x^2-2x+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \Rightarrow A=-C \\ -A+2A+B+C-2C+D=0 \Leftrightarrow A+B-C+D=0 \\ A-2A+2B+C-2C-2D=0 \Leftrightarrow -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C=-1/4 \\ B+D=2C \Rightarrow C=D=B \\ B=D \\ C+3C=1 \Rightarrow C=1/4 \end{cases}$$

A.Cutri 10/12/18

ii)

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \int \frac{-1/4}{x-1}dx + \int \frac{dx}{4(x-1)^2} + \int \frac{dx}{4(x+1)} + \int \frac{dx}{4(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\lg|x-1| + \frac{1}{4}\lg|x+1| - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + C$$

4. Q ha radici complesse multiple

ES:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = I$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A^{=1}}{x} + \frac{B^{=-1}x + C^{=0}}{x^2+1} + \frac{D^{=-1}x + E^{=0}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+\cancel{C})x(x^2+1) + x(Dx+\cancel{E})}{x(x^2+1)^2}$$

$A+B=0 \Rightarrow B=-1$

$C=0$

$2A+B+D=0 \Rightarrow D=-1$

$E=0$

$A=1$

A.Cutri 10/12/18

$$I = \lg|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \lg|x| - \frac{1}{2}\lg(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)} + C$$

In generale se si ha $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

$gr\,P(x) < gr\,Q(x)$

se $Q(x)$ ha grado n

$\Rightarrow Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ con $a_n \neq 0$

- Si deve considerare la decomposizione di $Q(x)$ in fattori irriducibili

$$Q(x) = a_n (x-b_1)^{n_1} (x-b_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x-b_k)^{n_k} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1} \dots (x^2 + c_e x + d_e)^{m_e}$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2m_1 + \dots + 2m_e$$

$\Downarrow$

$$(x-b_1)^{n_1} \rightsquigarrow \frac{A_{11}}{x-b_1} + \frac{A_{12}}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-b_1)^{n_1}}$$

$$(x^2+c_1x+d_1)^{m_1} \rightsquigarrow \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2+c_1x+d_1} + \frac{C_{12}x+D_{12}}{(x^2+c_1x+d_1)^2} + \dots + \frac{C_{1m_1}x + D_{1m_1}}{(x^2+c_1x+d_1)^{m_1}}$$

A.Cutri 10/12/18

Quindi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-b_1} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-b_1)^{n_1}} + \frac{A_{21}}{x-b_2} + \dots + \frac{A_{2n_2}}{(x-b_2)^{n_2}} +$$

$$+ \frac{A_{k1}}{x-b_k} + \frac{A_{k2}}{(x-b_k)^2} + \dots + \frac{A_{kn_k}}{(x-b_k)^{n_k}} +$$

$$\frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+c_1x+d_1} + \dots + \frac{C_{1m_1}x+D_{1m_1}}{(x^2+c_1x+d_1)^{m_1}} + \dots +$$

$$\frac{C_{e1}x+D_{e1}}{x^2+c_ex+d_e} + \dots + \frac{C_{em_e}x+D_{em_e}}{(x^2+c_ex+d_e)^{m_e}}$$

Tale rappresentazione è unica

Osserviamo che il metodo dei fratti semplici può portare al calcolo di

$$\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^m} \qquad \text{per } m \geq 2$$

con x^2+cx+d irriducibile

A.Cutri 10/12/18

Osserviamo che come abbiamo fatto la lezione scorsa

$$x^2+cx+d = x^2+cx+\left(\frac{c}{2}\right)^2+\underbrace{d-\frac{c^2}{4}}_{= a^2}$$

essendo $\underbrace{d-\frac{c^2}{4}}_{\frac{-\text{discriminante}}{4}}>0$

$$\Rightarrow x^2+cx+d = \left(x+\frac{c}{2}\right)^2+a^2$$

$$= a^2\left[1+\left(\frac{x+c/2}{a}\right)^2\right]$$

$$y=\frac{x+c/2}{a} \Rightarrow dy=\frac{1}{a}dx$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+cx+d)^m}=\frac{1}{a^{2m-1}}\int\frac{dy}{(1+y^2)^m}$$

$\Rightarrow$ sufficiente saper risolvere

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^m}dx \qquad m\geq 2$$

$(m=1 \rightsquigarrow \operatorname{arctg} x+c)$

Formule ricorsive per calcolare

$$I_m = \int \frac{1}{(1+x^2)^m}dx$$

Si vuole calcolare I_m noto I_{m-1}

$$\int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^m}dx = \underbrace{\int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}}_{= I_{m-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^m}$$

?

Valutiamo

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^m}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overset{g'}{2x}\,\overset{f}{x}}{(1+x^2)^m}dx \underset{p.p.}{=} \frac{1}{2}x\,\frac{(1+x^2)^{1-m}}{1-m} - \int \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{1-m}}{(1-m)}dx$$

$$\frac{2x}{(1+x^2)^m} = \left(\frac{(1+x^2)^{1-m}}{1-m}\right)'$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(1+x^2)^m}dx = \frac{1}{2(1-m)}\,x\,\frac{1}{(1+x^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)} I_{m-1}$$

$$\Downarrow$$

$$I_m = I_{m-1} - \frac{1}{2(1-m)}\frac{x}{(1+x^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(1-m)} I_{m-1}$$

$$\boxed{I_m = \frac{1}{2(m-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}} \quad m \geq 2$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}} \quad n \geq 2$$

Per esempio per $n=2$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

<u>oss</u>: $(x^2+1)^2$ ha 2 radici complesse coniugate doppie $x = \pm i$

Per le radici <u>doppie</u> esiste anche un altro metodo: Calcoliamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \int \cancel{\frac{d}{dx}} \left(\frac{1x}{2(x^2+1)} \right) \cancel{dx}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{\overset{=0}{A}x + \overset{=1/2}{B}}{(x^2+1)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\overset{=1/2}{C}x + \overset{=0}{D}}{(x^2+1)} \right)$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

A.Cutri 10/12/18

$$\Rightarrow (Ax+B)(x^2+1) - Cx^2 - 2xD + C = 1$$

$A = 0$; $B = C$; $A - 2D = 0 \Rightarrow D = 0$; $B + C = 1$

$\Rightarrow B = C = 1/2$

Il metodo illustrato sopra è un caso particolare della SCOMPOSIZIONE DI HERMITE che vale per le funzioni razionali in cui il polinomio a denominatore ha radici multiple (cfr Teorema 8.17 BDG)

Vediamo un altro esempio di applic. per radici DOPPIE del denominatore

inserendo i valori detti sotto

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x+4)^2} = A \lg|x+1| + B \lg|x+4| + \frac{Cx+D}{(x+1)(x+4)} + \text{cost}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{(x+1)(x+4)}\right)$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} + \frac{C(x^2+5x+4) - (Cx+D)(2x+5)}{(x+1)^2(x+4)^2}$$

$$\Rightarrow A(x+1)(x+4)^2 + B(x+4)(x+1)^2 - Cx^2 + 2Dx + 4C - 5D = 1$$

si trovano A, B, C, D

Quindi le funzioni razionali si sa come integrarle

Spesso mediante opportune sostituzioni ci si riconduce a funzioni razionali

Esistono delle sostituzioni base

Per esempio se si deve integrare una funzione razionale negli argomenti sen x, cos x la sostituzione base (se non si riesce a fare meglio con altri accorgimenti) è

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

<u>OSS</u>: Denotiamo con $R(x, y)$ una funzione razionale negli argomenti x, y

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$$

p. es. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$; $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$; $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x}\, dx$

A.Cutri 10/12/18

Con la sostituzione

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\,arctg\,t$$

$$\boxed{dx} = \boxed{\frac{2}{1+t^2}\,dt}$$

$\int R(\operatorname{sen}x, \cos x)\,dx$ diventa:

$$\boxed{\operatorname{sen}x} = \operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2\,tg\frac{x}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} \qquad 1 = \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 2\,tg\frac{x}{2}\,\frac{1}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x} = \cos 2\,\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} =$$

$$= \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} \qquad 1 = \operatorname{sen}^2+\cos^2$$

$$= \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

funzione razionale in t

A.Cutri 10/12/18

$$\int R(\operatorname{sen}x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Es:

1. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t} \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}} dt = \lg|t| + c$$

$$= \lg\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

2) $$\int \frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = \int \frac{2t}{\cancel{(1+t^2)}\left(\frac{2t}{\cancel{1+t^2}} + \frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{4t}{(1+t^2)(2t+1-t^2)} dt$$

$-t^2+2t+1=0 \Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$

$$\frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t+1+\sqrt{2}} + \frac{D}{t+1-\sqrt{2}} = \frac{4t}{(t^2+1)(-t^2+2t+1)}$$

$\rightsquigarrow$ risolvere

A.Cutri 10/12/18

<u>OSS</u>: non sempre conviene: per esempio quando

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int f(\operatorname{sen} x)\, \underbrace{\cos x\, dx}_{= d\operatorname{sen} x}$$

$\Rightarrow$ conviene $t = \operatorname{sen} x$

Esempio:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen} x (1-\operatorname{sen}^2 x)}{1+\operatorname{sen}^2 x} \cos x\, dx$$

$$t = \operatorname{sen} x \quad \rightsquigarrow \int \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t\, dt}{1+t^2} - \underbrace{\int \frac{(t^3+t-t)\, dt}{1+t^2}}_{\shortparallel}$$

$$-\int t\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \lg(1+\operatorname{sen}^2 x) + C$$

Cfr slides precedenti $\rightsquigarrow t = \operatorname{sen}^2 x$