Lezioni del 3 e 5 dicembre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente:Alessandra Cutrì

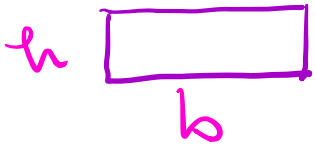
Argomenti:Calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale:integrale di Riemann: metodo di esaustione  definizione di partizione, somme inferiori e superiori, integrabilità, proprietà dell'integrale, funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità.
Argomenti:integrabilità di funzioni monotone (dim.), di funzioni continue, di funzioni con un numero finito di punti di discontinuità,funzioni primitive, teorema fondamentale del calcolo integrale(dim),integrale indefinito e formula di calcolo di integrale definito,integrale per parti

# Integrale di Riemann per funzioni di 1 variabile reale

Motivazioni:

1. Calcolo di aree di regioni:

oss: l'area di un rettangolo

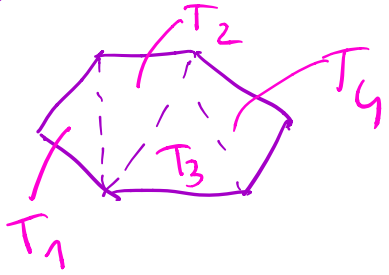



$A = b \cdot h$

oss: l'area di un triangolo

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

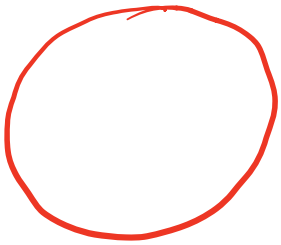
oss: l'area di un poligono




$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

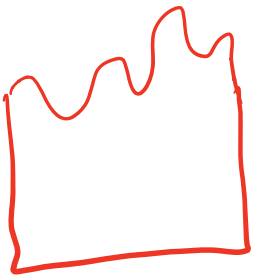
$T_i$ = area del triangolo i-mo in cui è suddivisibile poligono

Oss:



Il cerchio non è
Triangolarizzabile
come i poligoni

Come si definisce l'area?



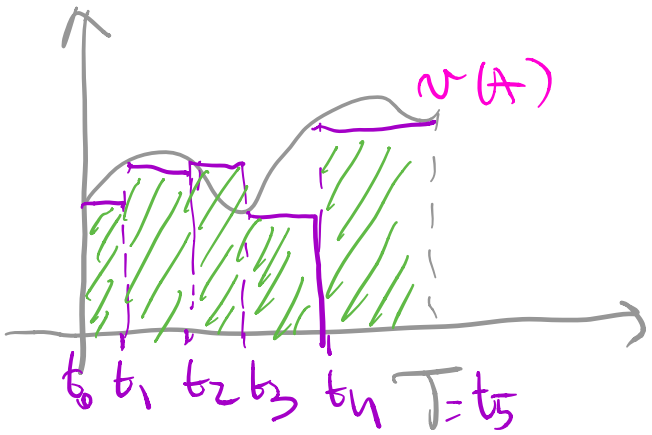
? Come si definisce
l'area di queste
regione?

Problema che risale ad

Archimede (287 a.C.)

⇝ METODO DI ESAUSTIONE

2. si vuole determinare la distanza
d percorsa da un'automobile
in un Tempo $T = 1m$ nota la
velocità $v(t)$ $0 \leq t \leq T$ se $v(t) = cost.$
$\Rightarrow d = vel \times tempo$. se $v(t)$ non è
costante?




Si possono fare nell'intervallo di Tempo $[0,T]$ più misurazioni della velocità e considerare nei singoli intervalli la velocità costante

$$d = v(t_0)(t_1-t_0) + v(t_1)(t_2-t_1)$$
$$+ v(t_2)(t_3-t_2) + v(t_3)(t_4-t_3)$$
$$+ v(t_4)(T-t_4)$$

= Area del Plurirettangolo

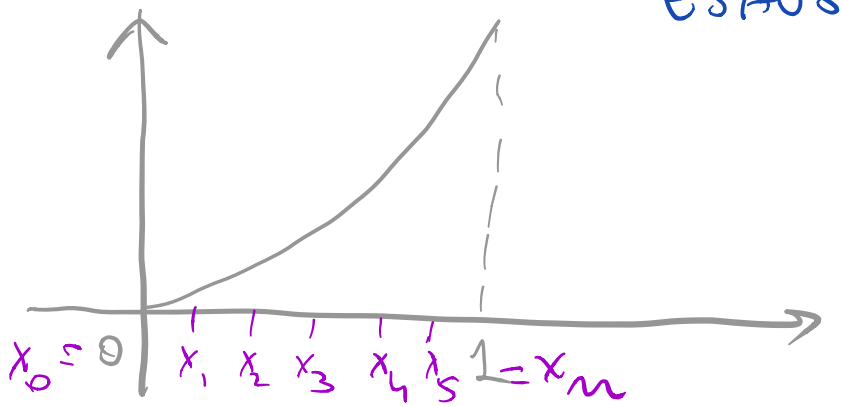
Infittendo i nodi di suddivisione dell'intervallo $[0,T]$ $\Rightarrow$ facendo più misurazioni $\Rightarrow$ migliore approx di $d$

Problema di Archimede (287 aC):

Determinare l'area del sottografico individuato dall'arco di parabola

$y = x^2$ $x \in [0,1]$

METODO DI ESAUSTIONE




Consideriamo una PARTIZIONE di $[0,1]$

$$P = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1\}$$

Cioè una suddivisione di $[0,1]$ in intervalli mediante i nodi $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

Con la condizione che $x_0 = 0$; $x_n = 1$

(nella figura $n = 6$)

Consideriamo l'intervallo

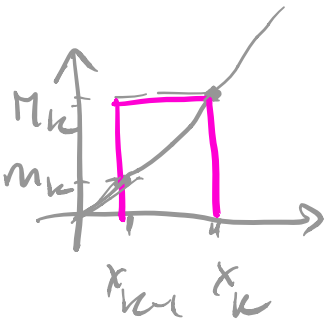
$[x_{k-1}, x_k]$ $\quad k = 1, \dots, n$

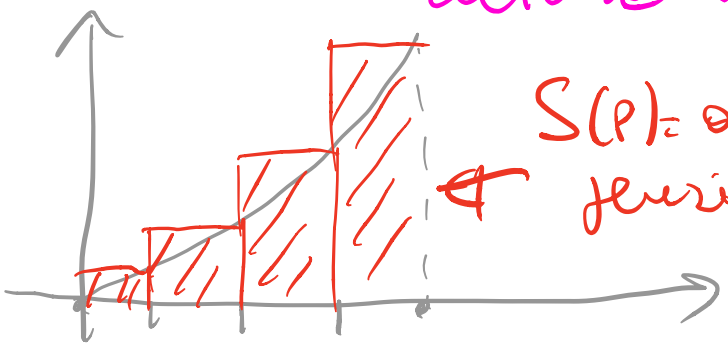
e $M_k = \sup_{(x_{k-1}, x_k)} x^2 = x_k^2$

$m_k = \inf_{(x_{k-1}, x_k)} x^2 = x_{k-1}^2$

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

Area del rettangolo di base $[x_{k-1}, x_k]$ e altezza $M_k$



$S(P)$ = area del pluririettangolo

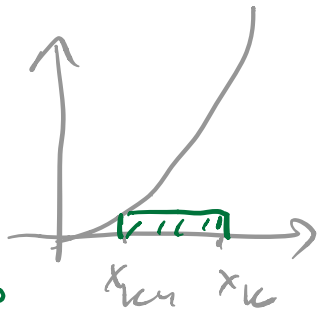
A.Cutri 3/12/18

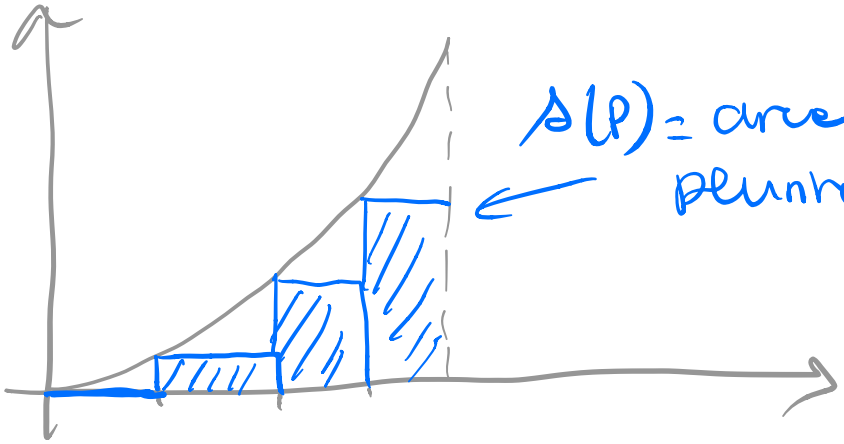
$S(P)$ = somma superiore

(approx. per eccesso dell'area del sottografico)

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

Area del rettangolo di base $[x_{k-1}, x_k]$ e altezza $m_k$



$s(P)$ = area del plurirettangolo

$s(P)$: SOMMA INFERIORE

(approssimazione per difetto dell'area del sottografico)

Se scegliamo $\mathcal{P}$ con nodi equidistanti

A.Cutri 3/12/18

Per esempio $x_k = \frac{k}{n}$ $k = 0, \dots, n$

$\Rightarrow x_0 = 0$ e $x_n = 1$ OK! $x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$

Abbiamo

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2$$

$k-1 = j \quad j = 0, \dots, n-1$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

(l'indice di sommatoria è un indice muto chiamarlo $j$ o $k$ è equivalente)

$$s(P) \le \text{Area} \le S(P)$$

Oss: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\blacksquare)$$

si trova per induzione

Quindi

$$S(P) = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$s(P) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$(\forall k \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq 0)$

$$= \frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6}$$

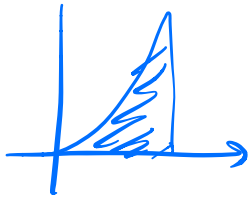
$$= \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \leq \text{Area} \leq \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n \to +\infty$ ($\Leftrightarrow$ infittire i nodi fino a che arrivare a $(x_k - x_{k-1} \to 0)$)

$$\frac{1}{3} \leq \text{Area} \leq \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \text{Area} = 1/3$



Dimostriamo (⊠) per induzione

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (⊠)$$

$n$

$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

Per $n=1$ $\quad 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ vero

Supponiamo vero che

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6}$$

Proviamo che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n-1$ $\quad$ $n$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2$$

ip induttiva

$$= \frac{n(2n^2-3n+1+6n)}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$(n+1)(2n+1)$

cvd

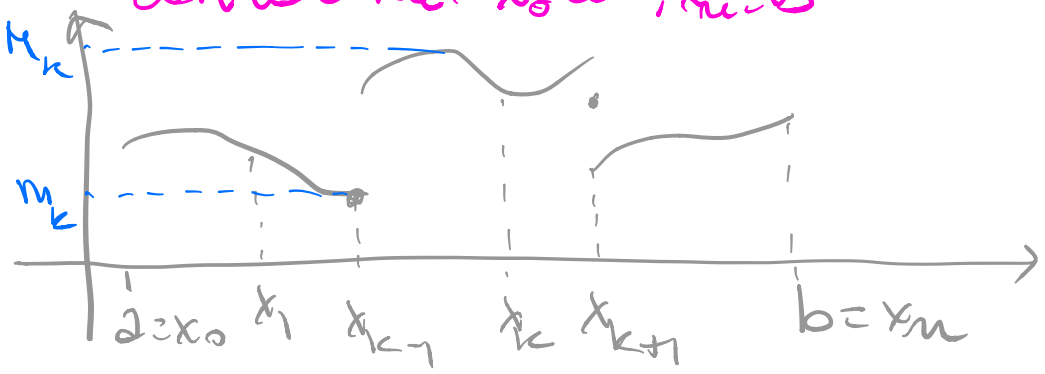
# Definizione di integrale di Riemann

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $f$ <u>limitata</u> in $[a,b]$

$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partizione di $[a,b]$

(cioè una suddivisione di $[a,b]$ con $n+1$ punti $\rightsquigarrow$ $n$ intervalli)

con le cond. $x_0 = a$, $x_n = b$




Indichiamo con

$$m_k = \inf \{ f(x) \quad x \in (x_{k-1}, x_k) \}$$

$$M_k = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$s(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

**OSS:**

1) fissata la partizione $\mathcal{P}$

$\Rightarrow s(P) \le S(P)$

perché $m_k \le M_k \quad \forall k = 1, \dots, n$

2) Se si infittisce la partizione

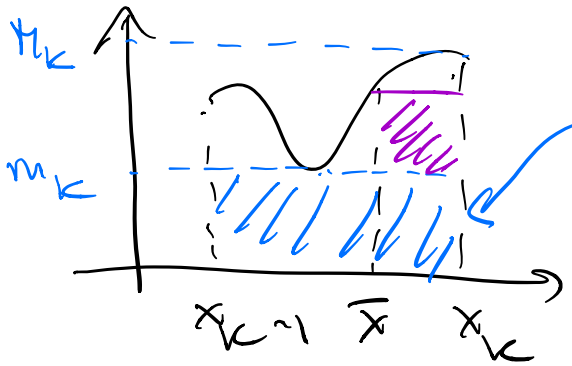
cioè si considera $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$

($\mathcal{P}'$ è più fine di $\mathcal{P}$)

$\Rightarrow$ $s(P) \le s(P')$

$S(P) \ge S(P')$

In fatti se aggiungiamo un nodo $\bar{x}$




termine di $s(P)$ relativo a $[x_{k-1}, x_k]$

$m_k(x_k - x_{k-1}) =$

$m_k(x_k - \bar{x}) + m_k(\bar{x} - x_{k-1})$

$< m_k(x_k - \bar{x}) + m'_k(\bar{x} - x_{k-1})$

Termine di $s(P')$ relativo a $[x_{k-1}, x_k]$

Se $m'_k = \inf_{(\bar{x}, x_k]} f > m_k$

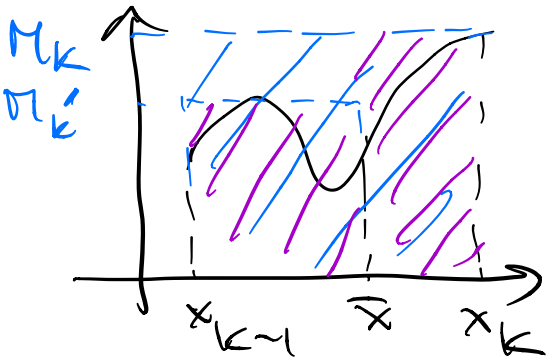
$\Rightarrow s(P) \le s(P')$

Viceversa

$$M_k' = \sup_{[x_{k-1},\bar{x}]} f \le \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = M_k$$

Termine di $S(P)$ relativo a $[x_{k-1}, x_k]$

$$M_k (x_k - x_{k-1}) = M_k (x_k - \bar{x}) + M_k (\bar{x} - x_{k-1})$$




$$> \underbrace{M_k' (\bar{x} - x_k) + M_k (x_k - \bar{x})}_{\text{Termine di } S(P') \text{ rel. a } [x_{k-1}, x_k]}$$

$$\Rightarrow S(P) > S(P')$$

Quindi infittendo le decomposizioni

le somme inferiori $s(P)$ ↗

le somme superiori $S(P)$ ↘

Inoltre $\forall P, Q$ partizioni di $[a,b]$

anche se non sono confrontabili

$$s(P) \leq S(Q)$$

Infatti sia $R = P \cup Q$

$\Rightarrow$ $R$ è più fine di $P$ e
$R$ è più fine di $Q$

$$\Downarrow$$

$$s(P) \leq s(R) \leq S(R) \leq S(Q)$$

Quindi

$A = \{ s(P) : P \text{ partizione di } [a,b] \}$

$B = \{ S(P) : P \text{ partizione di } [a,b] \}$

$A$ è limitato superiormente da ogni elemento di $B$

$B$ è limitato inferiormente da ogni elemento di $A$

A.Cutri 3/12/18

$$\sup A \leq \inf B$$

$$\Updownarrow$$

$$\sup_{P} s(P) \leq \inf_{P} S(P)$$

f è Riemann integrabile su [a,b]

$$\Longleftrightarrow \sup_{P} s(P) = \inf_{P} S(P)$$

$\Uparrow$ def

Integrale di Riemann di f su [a,b] $\int_a^b f(x)\,dx$

∃ un unico elemento di separazione tra l'insieme A e l'insieme B

e questo elemento di separazione se è unico è proprio $\int_a^b f(x)\,dx$

**Oss**: per definizione di estremo superiore di $A$ e di estremo inferiore di $B$

$$s(P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(Q)$$

$\forall P, Q$ partizioni di $[a,b]$

Se consideriamo le partizioni $P = Q = \{a, b\}$

$$\Downarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$m = \inf_{[a,b]} f$

$M = \sup_{[a,b]} f$

} entrambi finiti poiché $f$ è limitata per ipotesi su $[a,b]$

**Oss**: se $f = c$ costante $\Rightarrow m_k = M_k = c \ \forall k$

$\Rightarrow \forall P \ s(P) = S(P) = \{c(b-a)\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$

# Funzione non integrabile secondo Riemann

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

funzione di Dirichlet

$[a,b] = [0,1]$

$$\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = 1\}$$

$\Rightarrow \forall k$ l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene

- sia punti razionali $\Rightarrow$ dove $f = 1$
- sia punti irrazionali $\Rightarrow$ dove $f = 0$

$\Rightarrow m_k \geq 0$ e $M_k = 1$ $\forall k$

$s(P) = 0 \ \forall \mathcal{P} \Rightarrow \sup s(P) = 0$

$S(P) = 1 \ \forall P \qquad \inf S(P) = 1$

$$\sup s(P) < \inf S(P)$$

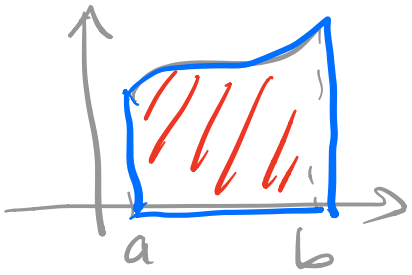
A.Cutri 3/12/18

$\rightarrow f$ non è Riemann integrabile in $[0,1]$

# Significato geometrico

- Se $f \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

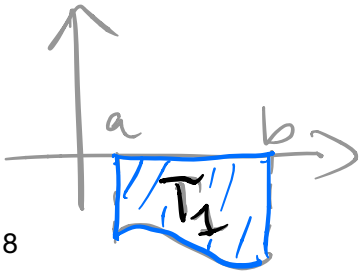



è un numero che rappresenta l'area della regione sotto grafico di $f$ su $[a,b]$ cioè delimitata dal grafico di $f$, le rette $x=a$ e $x=b$ e l'intervallo $[a,b]$

- Se $f \leq 0 \Rightarrow m_k \leq 0$ e $\pi_k \leq 0$

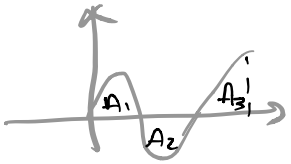
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ se esiste

rappresenta l'area (cambiata di segno)




$-\text{Area}(T_1) = \int_a^b f(x)\,dx$

- Se $f$ cambia segno in $[a,b]$?



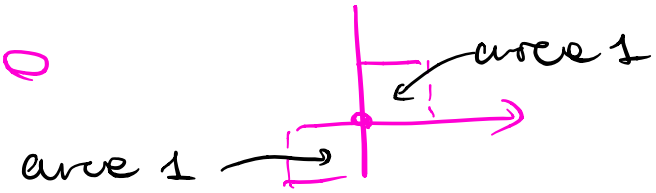

$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$ (somma algebrica delle aree)

- Additività dell'integrale:

se $f$ è integrabile in $[a,b]$ e

$c \in (a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = 0$




somma algebrica delle aree = 0

(vale per le funzioni dispari integrabili su un intervallo simmetrico rispetto all'origine)

- linearità dell'integrale: $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ (Riemann integrabili in $[a,b]$)

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

- se $a > b$ $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

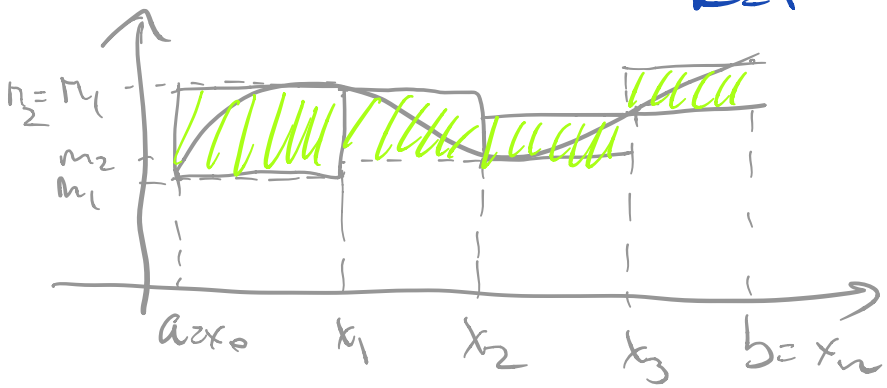
Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$

$f\in\mathcal{R}(a,b) \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, \mathcal{P}_\varepsilon$ di $[a,b]$ t.c. $S(\mathcal{P}_\varepsilon)-s(\mathcal{P}_\varepsilon)<\varepsilon$ (*)

$\mathcal{P}_\varepsilon=\{a=x_0<x_1<\dots<x_{k-1}<x_k<\dots<x_n=b\}$

OSS: $S(\mathcal{P}_\varepsilon)-s(\mathcal{P}_\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$




Cioè è possibile ricoprire il grafico con una unione finita di rettangoli $[m_k,M_k]\times[x_{k-1},x_k]$ in modo che l'area complessiva sia $<\varepsilon$ "arbitrariamente piccola"

oss: se (*) vale per $P_\varepsilon$ allora vale per ogni altra decomposizione più fine di $P_\varepsilon$

---

DIM CNES

- dim $\Rightarrow$ : Per hyp $f \in R(a,b)$ proviamo che vale (*).

Perché $f \in R(a,b) \iff \sup_{\mathcal{P}} s(P) = \inf_{\mathcal{P}} S(P) = \int_a^b f(x)\,dx =: I$

- $I = \sup s(P) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon'$ di $[a,b]$ :

$$s(P_\varepsilon') > I - \varepsilon/2$$

- $I = \inf S(P) \iff \exists P_\varepsilon''$ t.c.

$$S(P_\varepsilon'') < I + \varepsilon/2$$

$P_\varepsilon := P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$

$$s(P_\varepsilon') \le s(P_\varepsilon) \le S(P_\varepsilon) \le S(P_\varepsilon'') < I + \varepsilon/2$$

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < I + \varepsilon/2 - I + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

• dim $\Leftarrow$ : per hyp vale (*) $\Rightarrow f \in R(a,b)$

Poiché $\inf_{\mathcal{P}} S(P) \leq S(P_\varepsilon)$

$\sup_{\mathcal{P}} s(P) \geq s(P_\varepsilon)$

$0 \leq \inf S(P) - \sup s(P) \leq S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$ (*)

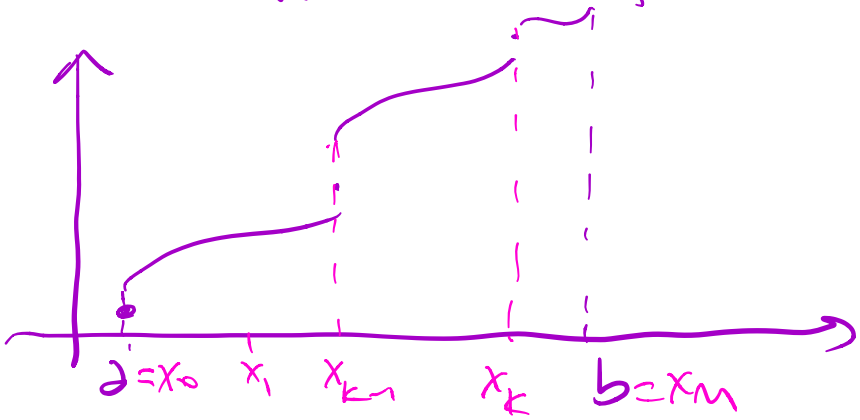
$\Rightarrow \inf S(P) = \sup s(P) = I = \int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow f \in R(a,b)$ c.v.d.

# Classi di funzioni $\mathcal{R}(a,b)$

- le funzioni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotone in $[a,b]$ sono $\mathcal{R}(a,b)$

Dim: Supponiamo $f\uparrow$ in $[a,b]$




Oss $f$ monotona in $[a,b] \Rightarrow f$ limitata in $[a,b]$: infatti $f(a)\le f(x)\le f(b)$ $\forall x\in(a,b)$

Se $f(a)=f(b)$ $(+f\uparrow)$ $\Rightarrow$ costante in $[a,b]$ $\Rightarrow f\in\mathcal{R}(a,b)$

Se $f(a)\neq f(b)$: $\forall\varepsilon>0$ consideriamo

$\mathcal{P}_\varepsilon=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ t.c.

$$\max_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}=|P_\varepsilon|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

($|P_\varepsilon|$: diametro di $P_\varepsilon$)

Consideriamo $S(P_\varepsilon)-s(P_\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$

Ma $M_k = \sup_{(x_{k-1}, x_k)} f(x) \leq f(x_k)$

$m_k = \inf_{(x_{k-1}, x_k)} f(x) \geq f(x_{k-1})$

Quindi

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})](x_k - x_{k-1})$$

$$\leq f(b) - f(a) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $f$ soddisfa la CNES di integrabilità

$\Rightarrow f \in R(a,b)$

Per esercizio fare la dimostrazione se $f \geq 0$

- Se $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R(a,b)$

(la dimostrazione la omettiamo perché si basa sul fatto che le funzioni continue su un insieme compatto sono UNIFORMEMENTE CONTINUE

$\rightarrow$ concetto che in questo corso non verrà trattato)

- Se $f \in C([a,b] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_N\})$

$\uparrow$ # finito di punti

$\Rightarrow f \in R(a,b)$

Teorema della media integrale:

Sia $f \in C([a,b]) \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

Infatti, $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R(a,b)$

quindi per def di integrale

$$s(P) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S(P) \quad \forall P \text{ di } [a,b]$$

se consideriamo $P = \{a,b\} \Rightarrow$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

A.Cutri 5/12/18

T. weierstrass

$m = \inf_{(a,b)} f = \min_{[a,b]} f$ $\qquad M = \sup_{(a,b)} f = \max_{[a,b]} f$

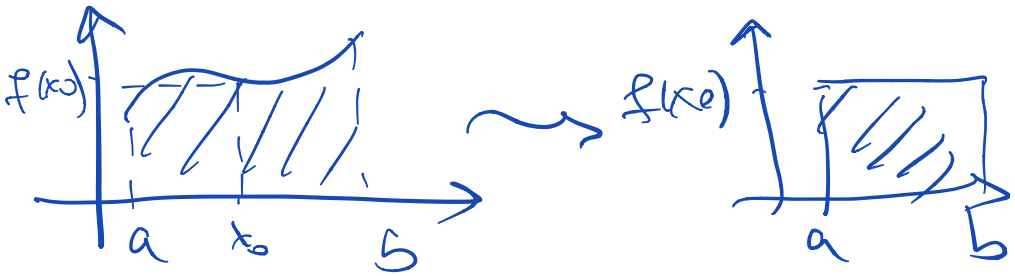
$\Rightarrow \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

$\Rightarrow$ Per il teorema dei valori intermedi essendo Inf un intervallo

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ :

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

and




le due regioni sono equivalenti

Altre proprietà dell'integrale :

- $f \le g$ in $[a,b]$ , $f, g \in R(a,b)$

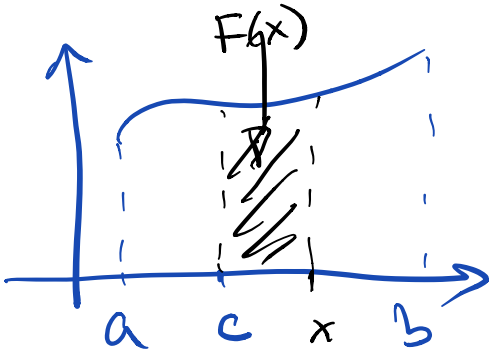
$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(Perché $g - f \ge 0 \Rightarrow \int g - f \ge 0$ + linearità)

- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \sup_{[a,b]} |f(x)|\,(b-a)$

# Funzione integrale

Sia $f \in R(a,b)$ $\quad c \in (a,b)$




$\forall x \in [a,b]$ consideriamo

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$$

F: funzione integrale di f relativa al punto c

Che succede se cambiamo il punto c? otteniamo una funzione integrale che differisce da F per una costante. Infatti: se $d \in [a,b]$

$$G(x) = \int_d^x f(t)\,dt = \int_d^c f(t)\,dt + \underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{=F(x)}$$

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + \boxed{\int_a^c f(t)\,dt} = \text{numero}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale:
Sia $f \in R(a,b)$; $c \in [a,b]$

$x_0 \in [a,b]$ e $f$ continua in $x_0$

Allora $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ è derivabile in $x_0$ e $F'(x_0) = f(x_0)$

Oss: In particolare, se $f \in C([a,b])$
$\Rightarrow F$ è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Oss2: se $f \in R(a,b)$ [senza altre ipotesi di continuità] $\Rightarrow F \in Lip(a,b)$

$(\Rightarrow F \in C[a,b])$

A.Cutri 5/12/18

infatti:

$$\left|\frac{F(x)-F(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^y f(t)\,dt}{x-y}\right|$$

$$= \left|\frac{\int_y^x f(t)\,dt}{x-y}\right| \leq \sup_{[a,b]}|f| = L \Rightarrow |F(x)-F(y)| \leq L\,|x-y|$$

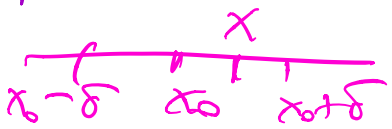
DIM (T. F.C) : Dobbiamo provare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} = f(x_0)$$ cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon$$




Me se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $t \in (x_0, x)$

$\Rightarrow t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ + f continua in $x_0$ $\Leftarrow$

$$f(x_0) - \varepsilon \le f(t) \le f(x_0) + \varepsilon$$

$$\frac{(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)}{x - x_0} \le \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} \le \frac{(f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} = f(x_0)$$

Def. di funzione PRIMITIVA:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Una funzione $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice una PRIMITIVA di $f$ se

$g$ è derivabile in $(a,b)$ e

$\forall x\in(a,b) \quad g'(x)=f(x)$

Oss: Per il T.F.C. se $f\in C([a,b])$

$\Rightarrow F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$ ($c\in[a,b]$ fissato)

è una primitiva di $f$

(perché $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$)

Esempi: $f(x)=\cos x \longleftrightarrow g(x)=\sin x$

$f(x)=x^3 \longleftrightarrow g(x)=\frac{x^4}{4}$

$g$ sono primitive di $f$ ne esistono altre?

# Caratterizzazione delle primitive:

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$ in $(a;b)$

$\Rightarrow$ $F(x) - G(x)$ è costante

Infatti $H(x) = F(x) - G(x)$ verifica

$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ in $(a;b)$

$\Rightarrow H(x) =$ costante in $(a;b)$

$\Downarrow$

Tutte le primitive di una funzione si ottengono aggiungendo ad una primitiva una qualunque costante

Le primitive di $f(x) = x^3$ sono $g(x) = \frac{x^4}{4} + c$ ; le primitive di $f(x) = \cos x$ sono $g(x) = \sin x + c$

Conseguenze del T.F.C.

Sia $f \in C([a,b])$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$

dove $G(x)$ è una primitiva di $f$

Infatti se $f \in C([a,b])$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ è una primitiva di $f(x)$

$\Rightarrow$ Una qualunque primitiva di $f$ ha la forma

$$G(x) = k + \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow G(a) = k \quad \Rightarrow G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow G(b) = G(a) + \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Esempi:

$$\int_0^1 x^2\,dx = G(1) - G(0) \quad \text{dove } G(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} = 1$$

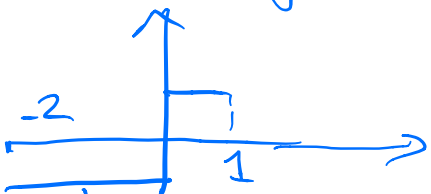
$$G(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

INTEGRALE INDEFINITO: l'insieme delle primitive di una $f \in C([a,b])$ si chiama integrale indefinito di $f$ e si indica con

$$\int f(x)\,dx$$

E se $f$ non è continua? per esempio

$f(x) = \operatorname{sgn} x$ in $(-2,1)$




$$\int_{-2}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = \int_{-2}^{0} -1\,dx + \int_0^1 1\,dx = -x\Big|_{-2}^{0} + x\Big|_0^1 = -2 + 1 = -1$$

$\operatorname{sgn} x$ non ammette primitive in $(-2,1)$ perché non esiste alcuna funzione derivabile la cui derivata è $\operatorname{sgn} x$ in $(-2,1)$ (perché $\operatorname{sgn} x$ ha una discontinuità di salto in $x=0$)

Alcune primitive elementari

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \lg|x| + C \qquad x \neq 0$$

Dato $(\lg|x|)'$ è $\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & x<0 \end{cases}$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$$

A.Cutri 5/12/18

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

L'integrale indefinito è un insieme di funzioni! L'int. definito è un numero!

# Metodi di integrazione

- Integrazione per PARTI

si deduce dalla formula di derivazione del prodotto di funzioni:

Siano $f, g$ derivabili in $(a,b)$ con derivate continue in $(a,b)$

$$\Rightarrow \left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Downarrow$$

le primitive di $\left(f(x)g(x)\right)'$ sono

$$\int \left(f(x)g(x)\right)'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\Vert \qquad\qquad \Vert$$

$$f(x)g(x)+C$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

si scarica le derivate da $f$ a $g$

La versione per gli integrali definiti è:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

ES:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$f'(x) = e^x \rightsquigarrow f(x) = e^x$

$g(x) = x \rightsquigarrow g'(x) = 1$

OSS: se avessimo scelto

$f'(x) = x \rightsquigarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = e^x \rightsquigarrow g'(x) = e^x$

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

↑ più difficile

ES:

$$\int \log x\, dx = \int 1 \cdot \log x = x\log x - \int 1\, dx = x\log x - x + C$$

$f'(x) = 1 \rightsquigarrow f(x) = x$

$g(x) = \log x \rightsquigarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_2^5 xe^x dx = xe^x \Big|_2^5 - \int_2^5 e^x dx =$$

$$= 5e^5 - 2e^2 - e^x \Big|_2^5 =$$

$$= 5e^5 - 2e^2 - e^5 + e^2 = xe^x - e^x \Big|_2^5$$

oss: In generale per integrali tipo

$$\int P_n(x)\, e^x dx = P_n(x) e^x - \int e^x P_n'(x) = (*)$$

↑ polinomio di grado $n$

Poiché $P_n'(x)$ ha grado $= n-1$

Se derivo $n$-volte un pol. di grado $n$ ottengo una costante

$\Rightarrow$ $g(x) = P_n(x)$

$f'(x) = e^x$

$$(*) = \left(P_n(x) - P_n'(x)\right)e^x + \int e^x \underbrace{P_n''(x)}_{\text{gr } n-2} = \dots -$$

$g(x) = P_n'(x)$

$f(x) = e^x$

$$= - \dots + \int e^x dx$$

$$= - \dots + e^x + C$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Es

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx =$$

$g(x) = x$ $\qquad = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$

$f'(x) = \operatorname{sen} x$

oss: se avessimo scelto $f'(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx$$

più difficile

dv

Es:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) dx =$$

$f'(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$

$g(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + C$$

$\Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) + C$

Oss: se andassi avanti nell'integrale per parti servendo

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cos x\,dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x\,dx$$

avrei $0 = 0$ $\rightsquigarrow$ non dice nulla

(è come fare un'operazione e per tornare indietro con la inversa)

Es: verificare che

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \sin x \cos x\right) + C$$

Es:

$$\int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

($f' = e^x$, $g = \cos x$)

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos x + \sin x\right) + C$$