Lezione del 17 dicembre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente:Alessandra Cutrì

Argomenti:integrali impropri:assoluta integrabilità in senso improprio, esempi di funzioni integrabili ma non assolutamente integrabili in senso improprio, esercizi sull'utilizzo di teoremi di confronto e confronto asintotico, integrabilità di $1/x^a(\log x)^b$ sia all'infinito che vicino a zero

La volta scorsa abbiamo analizzato il comportamento al variare di $\alpha > 0$ di

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{matrix} < +\infty & \forall \alpha > 1 \\ = +\infty & \forall \alpha \le 1 \end{matrix}$$

e di

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{conv. se } \alpha < 1$$

<u>Es</u>: Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ in $[1, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{per quali } \alpha \in \mathbb{R} \text{ esiste?}$$

A.Cutri 14/12/18

$$\int_1^{\omega} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(\omega^{1-\alpha} - 1\right) & \text{se } \alpha \ne 1 \\ \lg \omega & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio all'∞ se e solo se $\boxed{\alpha > 1}$

ATTENZIONE: Non confondere il limite della funzione integrale che $\frac{1}{x^\alpha}$ con il limite della funzione integrale

$$\int_1^{\omega} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} L \text{ finito}$$
$\Updownarrow$
$\alpha > 1$

OSS: $\frac{1}{x^\alpha} \to 0$ $\forall \alpha > 0$ ma all'∞ è int. solo se $\alpha > 1$

A.Cutri 14/12/18

Confrontando con quanto visto prima

$\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile vicino a zero se $\alpha < 1$

" " " all'∞ $\Leftrightarrow \alpha >$

In tutti gli esempi precedenti per verificare l'esistenza dell'integrale improprio abbiamo calcolato una primitiva e poi fatto il limite della primitiva

Spesso non interessa conoscere quanto vale un integrale improprio ma solo sapere se è convergente o meno

Non sempre è facile determinare una primitiva.
Se non si deve conoscere il valore dell'integrale improprio ma sapere solo se converge o meno

Per questo ci sono dei criteri che però si riferiscono a

A.Cutri 14/12/18

funzioni integrande $\boxed{f(x) \geq 0}$

$\Rightarrow$ la funzione integrale è monotona crescente :

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ t.c. $\forall \omega\in(a,b)$

$f\in R(a,\omega)$

$\int_a^b f(x)\,dx$ esiste se è finito

$$\lim_{\omega\to b^-}\int_a^{\omega} f(x)\,dx=\lim_{\omega\to b^-}F(\omega)$$

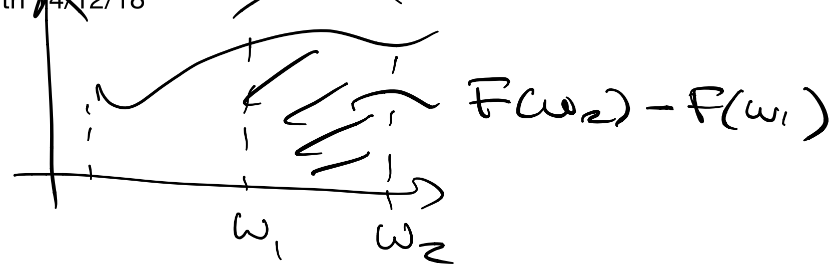
se $f\geq 0 \Rightarrow F\nearrow$ infatti se

$\omega_1<\omega_2$

$$F(\omega_2)=\int_a^{\omega_2} f(x)\,dx=F(\omega_1)+\underbrace{\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx}_{\geq 0}$$

$$\geq F(\omega_1)$$

A.Cutri 14/12/18



OSS: le funzioni monotone $\nearrow$ ammettono limite finito se sono limitate superiormente, quindi perché $\exists \lim_{\omega\to b^-} F(\omega)$ è sufficiente in tal caso $F(\omega)\leq L$

OSS: Vale risultato analogo

se $f \le 0$ in $[a,b)$ perché in tal caso $F \downarrow$ $\Rightarrow$ perché converge è suff. che sia limitata inf.

Da queste osservazioni

$\Downarrow$

Teorema di confronto 1

Siano $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

integrabili in $[a,\omega]$ $\forall \omega < b$

$+$

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in U_-(b)$$

$\Rightarrow$

se g è int. in senso improprio in (a,b)

$\Rightarrow$ f è " " " "

se f non è int. in senso improprio in (a,b)

$\Rightarrow$ g " " " " "

del confronto asintotico
+
integrabilità in senso improprio
delle funzioni $\frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha<1$
in $(0,1)$ (in un intorno di $x=0$)

$\Downarrow$

se $f \geq 0$ $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

e $f(x)$ ha ordine di infinito

β per $x \to 0$ cioè $\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\beta} \to \ell \neq 0$ $\ell \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ $x \to 0$

Quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge

$\Longleftrightarrow$ $\beta < 1$

A.Cutrì 14/12/18

Analogamente, se $f \geq 0$

$f \to 0$ $x \to +\infty$ con ordine

β allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

$\Leftrightarrow \beta > 1$

(visto che $\int^{\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1$)

Attenzione: il risultato vale se f ha ordine paragonabile di infinitesimo per $x \to +\infty$ e tale ordine è > 1

$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \to +\infty$ NON è sufficiente a garantire l'integrabilità di f all'∞

A.Cutri 14/12/18

Es: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \lg x}\,dx$ $\boxed{\frac{1}{x \lg x} = o\left(\frac{1}{x}\right)_{x \to +\infty}}$

Però
$$\int_2^{\omega} \frac{1}{x \lg x} \underset{y=\lg x}{=} \int_{\lg 2}^{\lg \omega} \frac{1}{y}\, dy =$$

$$\lg(\lg \omega) - \lg(\lg 2)$$

$\to +\infty$ se $\omega \to +\infty$

y

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \lg x} = \boxed{+\infty}$$

l'integrale può divergere

$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ è diverso da

A.Cutri 14/12/18

$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right)$ con $\beta > 1$

e l'integrale converge

Vediamo cosa accade

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\lg x)^{\beta}}\, dx \qquad f(x) = \frac{1}{x(\lg x)^{\beta}} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ma non basta

Possiamo det. una primitiva in tal caso

$$\int_2^{\omega} \frac{1}{x(\lg x)^{\beta}}\,dx \underset{y=\lg x}{=} \int_{\lg 2}^{\lg \omega} \frac{1}{y^{\beta}}\,dy$$

$\beta \neq 1$
($\beta = 1$ già trattato)

$$= \underbrace{\left[\frac{(\lg \omega)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\lg 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]}_{F(\omega)}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \begin{cases} \text{finito se } 1-\beta<0 \text{ cioè } \beta>1 \\ +\infty \quad \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\lg x)^{\beta}}\,dx$$ converge se $\beta > 1$

diverge se $\beta \leq 1$

A.Cutrì 14/12/16

le funzioni $\frac{1}{x(\lg x)^{\beta}}$ si possono usare per confronto che succede vicino a zero?

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x(\lg x)^\beta}\,dx$$

come si comporta al variare di β?

$$\int_\omega^{1/2} \frac{1}{x|\lg x|^\beta}\,dx = \int_{\lg \omega}^{\lg(1/2)} \frac{1}{y^\beta}\,dy$$

$\beta \neq 1$

$$= \frac{(\lg(1/2))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\lg \omega)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

$$\xrightarrow[\omega \to 0^+]{} \begin{cases} \text{finito se } \beta > 1 \\ \text{infinito se } \beta < 1 \end{cases}$$

$\beta = 1$ $\quad \lim_{\omega \to 0} \lg(|\lg \omega|) = +\infty$

$\Downarrow$

A.Cutrì 14/12/18

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\lg x|^\beta}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge se } \beta > 1 \\ \text{diverge se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio: determinare $\beta > 0$

t.c.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|^\beta}{x^2} dx \quad \text{sia convergente}$$

- il problema si pone sia $x \to 0^+$

(funzione è limitata) sia per $x \to +\infty$

Spezziamo l'integrale in modo da avere "il problema" in un solo punto: per esempio

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen} x|^\beta}{x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|^\beta}{x^2} dx}_{I_2}$$

I converge $\Leftrightarrow$ I_1 e I_2 convergono

- Studiamo I_1

$f(x) = \dfrac{|\operatorname{sen} x|^\beta}{x^2} \geq 0$ e per $x \to 0^+$

$$f(x) = \frac{x^\beta}{x^2}(1 + o(1)) \Rightarrow f(x) = O(x^{\beta - 2})$$

se $\beta \geq 2$ f è limitata nel suo intervallo, continua in $(0,1)$
$\Rightarrow f \in R(0,1)$
$\Rightarrow I_1 < +\infty$

se $\beta < 2$ $f \to +\infty$ per $x \to 0^+$

con ordine di infinito $= 2-\beta$

$\Rightarrow$ I_1 è finito se $2-\beta < 1$
T. confr.

cioè per $\beta > 1$

$\Rightarrow$ I_1 converge <u>sse</u> $\beta > 1$

(se $\beta \leq 1$ $f = O\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$ con $\gamma \geq 1$

A.Cutri 14/12/18

$\Rightarrow I_1$ diverge)

- Studiamo $I_2 = \int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|^\beta}{x^2} dx$

$$0 \leq \frac{|\operatorname{sen} x|^\beta}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall \beta > 0$$

ed essendo $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow I_2$ conv. sempre

Quindi $I < +\infty \iff \beta > 1$

A.Cutri 17/12/18

Assoluta integrabilità in senso improprio?

Abbiamo visto che i criteri di confronto - confronto asintotico si applicano a funzioni che hanno segno costante vicino al punto da considerare (quello dove f non è limitata oppure $\pm\infty$)

$f \geq 0$ definitivamente (anche se volessimo

A.Cutri 17/12/18

$f \leq 0$ definitivamente)

Def: f è assolutamente integrabile in senso improprio se $|f|$ è integrabile in senso improprio

I criteri di confronto sono criteri di assoluta integrabilità

Se f è assolutamente integrabile

$\Rightarrow$ f è integrabile

$\Leftarrow$ NON E' VERO

Infatti

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx < +\infty \quad \text{MA}$$

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = +\infty$$

Proviamolo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

integrabile secondo Riemann

A.Cutri 17/12/18

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \underset{\text{p.p.}}{=}$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{\omega} + \int_1^{\omega} \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$\underbrace{-\frac{\cos\omega}{\omega}}_{\to 0} + \cos 1 + \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Ma $0 \le \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$

$\Rightarrow$ $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$

Ma non è assolutamente integrabile infatti:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = +\infty$$

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x} \cdot 1 \ge \frac{|\operatorname{sen} x|^2}{x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \ge 0 \text{ in } (1,+\infty)$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \ge \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx$$

Ms

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_1^{\omega}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx =$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$[\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1-2\operatorname{sen}^2 x]$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty}\int_1^{\omega}\frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\lg\omega}_{\boxed{+\infty}} - \underbrace{\int_1^{\omega}\frac{\cos 2x}{2x}\,dx}_{\text{L finito } (\times \omega)}\Big)$$

$= +\infty$

$$\int_1^{\omega}\frac{\cos 2x}{2x}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\Big|_1^{\omega}}_{\omega\to+\infty \ \ 0} + \frac{1}{4}\int_1^{\omega}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,dx$$

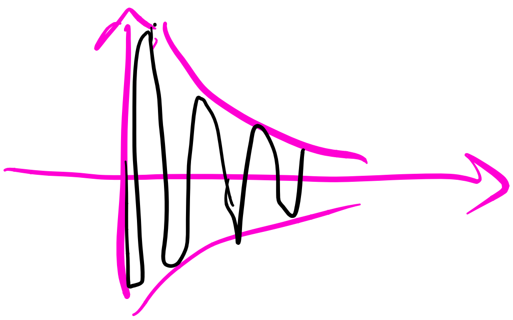
$$\le \int\frac{1}{x^2} < +\infty.$$

A.Cutri 17/12/18

ES: $$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$$

NON È LIMITATA PER $x \to 0^+$

e NON HA SEGNO COSTANTE $x \to 0^+$



Però $$\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx$$

$$0 \le \left|\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

è integrabile in $(0,1)$ in senso improprio

$\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è assolutamente integrabile in senso improprio

A.Cutri 17/12/18

in $(0,1)$ $\Rightarrow$ è integrabile

($|f|$ int $\Rightarrow$ f int.) $\Rightarrow$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\, dx$ <u>finito</u>

Abbiamo visto che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Analogamente

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

infinito campione per $x \to b$

se $f \geq 0$ vicino a b ed è

infinito di ordine β per $x \to b$

$\Rightarrow$ se $\beta < 1$ f è int. in senso imp. vicino a b

se $\beta \geq 1$ l'integrale $\int^b f$ diverge

$$I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\lg x}}\, dx$$

pb. c'è per $x \to 1^+$

$$\lg x \underset{x\to 1}{=} \lg(1+x-1) = x-1 + o(x-1)$$

$$\sqrt{\lg x} = (x-1)^{1/2} + o((x-1)^{1/2}) \quad x \to 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{\sqrt{\lg x}} \quad + \quad f = O\left(\frac{1}{(x-1)^{1/2}}\right)$$

essendo $\frac{1}{2} < 1$ l'ordine di infinito di f $(f \geq 0)$

$$\Rightarrow I < +\infty$$

A.Cutri 17/12/18

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(\lg x)^\beta} dx =: I$$

Pb. c'è per $x \to 1^+$

$$\underset{\substack{\vee\\ 0}}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)(\lg x)^\beta} = \frac{1}{(x-1)[(x-1)+o(x-1)]^\beta}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^{\beta+1}}(1+o(1))$$

quindi l'ordine di infinito di

$f \geq 0$ è $\beta+1$

$\Rightarrow$ I è finito $\Leftrightarrow$ $\beta+1 < 1$ cioè

$\Leftrightarrow$ $\beta < 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - \lg(1+x)}$$

pb. è vicino a zero

A.Cutri 17/12/18

$$\underset{\substack{\vee\\ 0}}{f(x)} = \frac{1}{x-\lg(1+x)} = \frac{1}{\cancel{x} - (\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}$$

$$= \frac{1}{x^2}(1+o(1))\,2 \quad \alpha = 2 > 1$$

$\Rightarrow$ int. diverge

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

e^{-x^2} è pari

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

finito perché $e^{-x^2} \in C([0,1])$ (è un int. di Riemann)

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

$x \geq 1 \quad x^2 \geq x \quad 0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$ e $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx < +\infty$ (visto la volta scorsa)

o anche $e^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

non ha ordine di infinitesimo

ma $x^{\beta}e^{-x^2} \to 0 \quad x \to +\infty \quad \forall \beta > 0$

anche per $\beta = 2 \Rightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$ def. per $x \to +\infty$

A.Cutri 17/12/18

Quindi per il criterio del confronto

$0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$

ha int. conv. in senso improprio

$\Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$

<u>OSS</u>: Perché $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

<u>non</u> è necessario che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$

<u>MA</u> se $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ $(*)$

allora $L = 0$

(ci sono funzioni illimitate
A.Cutri 17/12/18
per $x \to +\infty$ che NON HANNO LIMITE ma con integrale impr. convergente)

Proviamo (∞)

infatti se $\exists\, \ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ e

$\ell \neq 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \omega_0 > 0$ t.c. (scelgo $\varepsilon = \ell/2$)

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x > \omega_0$

$$\Rightarrow \lim_{\omega\to+\infty} \int_a^{\omega} f(x)\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_{\omega_0}^{\omega} f(x)\,dx + \int_a^{\omega_0} f$$

$$> \int_a^{\omega_0} f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{\omega\to+\infty} (\underbrace{\ell-\varepsilon}_{=\frac{\ell}{2}})(\omega-\omega_0)}_{=+\infty}$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

ES: Studiare

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\lg(x^4+4)}{x^3}}_{f(x)}\,dx$$ l'unico problema è a $+\infty$

$f(x) \geq 0$ in $(1,+\infty)$

$f(x) \to 0$ $x \to +\infty$ ma

non ha ordine di infinitesimo

però $\dfrac{\lg(x^4+4)}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ $\lg(x^4+4) \leq x$ def. per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ $f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$ definitiv. per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

Es: studiare al variare di β $\mathbb{R}_0$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x(-\log x)^\beta + x^2(1-x^2)^{1/3}}$$

problema sia in $x=0$ che in $x=1$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x(-\log x)^\beta + x^2(1-x^2)^{1/3}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x(-\log x)^\beta + x^2(1-x^2)^{1/3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x(-\log x)^\beta + \underbrace{x^2(1-x^2)^{1/3}}_{>0}} > 0$$

per $x \to 0$

$$f(x) \le \frac{1}{x(-\log x)^\beta}$$ che ha integrale conv. se $\beta > 1$

A.Cutri 17/12/18

Prima di analizzare che succede se $\beta \le 1$ ode

Vediamo se ci sono vincoli su β per $x \to 1$

per $x \to 1$

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{x^2 (1-x)^{1/3} (1+x)^{1/3}}$$

$$= O\left(\frac{1}{(1-x)^{1/3}}\right) \quad \alpha = 1/3 < 1$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \text{ converge } \forall \beta$$

Allora, non avendo altri vincoli su β per l'integrabilità vicino a 1, dobbiamo verificare

A.Cutri 17/12/18

succede all'integrabilità vicino a zero se $\beta \le 1$

$$f(x) = \frac{1}{x(-\lg x)^{\beta}\left[1 + \underbrace{\frac{x}{(-\lg x)^{\beta}}}_{o(1)}(1-x^2)^{1/3}\right]}$$

$x \to 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{1}{x(-\lg x)^\beta}(1+o(1))$ per $x \to 0$
ok

$\Rightarrow$ per il criterio di confronto asintotico $f(x) = O(g(x))$

$g(x) = \dfrac{1}{x(-\lg x)^\beta}$ ha int. div. vicino a zero se $\beta \leq 1$

$\Rightarrow$ $I = +\infty$ se $\beta \leq 1$

$I < +\infty$ se $\beta > 1$

Discutiamo ora l'integrabilità

di
$$\bar{I} = \int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha (-\lg x)^\beta}$$

se $\alpha \neq 1$
(caso $\alpha = 1$
già trattato)

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{x^\alpha (-\lg x)^\beta}$$

se $\boxed{\alpha < 1}$ perché

$(-\lg x) \to +\infty$ per $x \to 0$

se $\beta > 0$ $0 \leftarrow \frac{1}{(-\lg x)^\beta} \leq 1$ def.

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha < 1$

$\Rightarrow \bar{I} < +\infty$

A.Cutri 17/12/18

se $\beta < 0$ $\frac{1}{(-\lg x)^\beta} \to +\infty$ <u>ma</u>

$$\frac{x^\gamma}{(-\lg x)^\beta} \longrightarrow 0 \quad \forall \gamma > 0$$ quindi

se $\alpha < 1$ $\quad \exists \gamma > 0$ t.c. $\alpha + \gamma < 1$

e $$\frac{x^\gamma}{(-\lg x)^\beta} \underset{\text{def}}{<} 1 \Rightarrow \frac{1}{(-\lg x)^\beta} < \frac{1}{x^\gamma}$$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{1}{x^{\alpha+\gamma}} \quad \text{con } \gamma + \alpha < 1$$

integrabile in $(0, 1/2)$

$$\Rightarrow \boxed{I < +\infty \text{ se } \alpha < 1 \ \forall \beta \in \mathbb{R}}$$

se $\boxed{\alpha > 1}$

$$0 < f(x) = \frac{1}{x^\alpha (-\lg x)^\beta}$$

A.Cutri 17/12/18

se $\boxed{\beta \leq 0}$ $\quad f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha} \Rightarrow \boxed{I = +\infty}$

$\alpha \geq 1$

se $\boxed{\beta > 0}$

$$\frac{1}{(-\log x)^{\beta}} \to 0$$ ma più lentamente di qualunque pot. di x

$$\frac{1}{x^{\gamma}(-\log x)^{\beta}} \to +\infty \quad \forall \gamma > 0$$

se $\alpha > 1$ $\quad \exists \gamma > 0 : \alpha - \gamma > 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-\gamma}\, x^{\gamma}(-\log x)^{\beta}} > \frac{1}{x^{\alpha-\gamma}}$$

$\alpha - \gamma > 1$

$\Rightarrow \boxed{I = +\infty}$

In definitiva $$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{\alpha}(-\log x)^{\beta}}\,dx$$

conv. se $\alpha < 1$ $\quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

se $\alpha > 1$ $\quad$ mai

se $\alpha = 1$ $\quad \forall \beta > 1$

A.Cutri 17/12/18

Vediamo che succede in un intorno di $+\infty$

$$I = \int_2^{\boxed{+\infty}} \frac{1}{x^{\alpha}(\lg x)^{\beta}}\,dx$$

se $\alpha = 1$ $\quad I < +\infty \iff \beta > 1$

se $\alpha > 1$?

$x \to +\infty \qquad \lg x \to +\infty$

$\Rightarrow$ se $\beta > 0 \quad \Rightarrow (\lg x)^{\beta} \to +\infty$

$$\frac{1}{(\lg x)^{\beta}} \to 0 \qquad \Rightarrow 0 < f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(\lg x)^{\beta}} < \frac{1}{x^{\alpha}} \quad \alpha > 1$$

$\Rightarrow \quad I < +\infty$

se $\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{(\lg x)^{\beta}} \to +\infty$ ma più lentamente di x^{γ} $\forall \gamma > 0$

se $\alpha > 1$ $\quad \exists\, \gamma > 0$ t.c. $\alpha - \gamma > 1$

$$\Rightarrow 0 < f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \frac{1}{(\lg x)^\beta} < \frac{x^\gamma}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\gamma}}$$

$\alpha - \gamma > 1$

$\Rightarrow I < +\infty$

Quindi se $\boxed{\alpha > 1 \quad I < +\infty \ \forall \beta \in \mathbb{R}}$

se $\alpha < 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\lg x)^\beta}$$

se $\beta < 0$ $\quad \frac{1}{(\lg x)^\beta} \to +\infty \Rightarrow f(x) > \frac{1}{x^\alpha}$

$\alpha < 1$

$\Rightarrow I = +\infty$

se $\beta \geq 0$ $\quad \dfrac{1}{(\lg x)^\beta} \to 0$

ma, $\forall \gamma > 0$ $\quad \dfrac{x^\gamma}{(\lg x)^\beta} \to +\infty$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(\lg x)^\beta} > \dfrac{1}{x^\gamma}$

se $\alpha < 1$ $\quad \exists\, \gamma_0 > 0 \,!\, \boxed{\alpha + \gamma_0 < 1}$

$$f(x) > \frac{1}{x^{\alpha+\gamma_0}}$$

che integr. divergente

$\Rightarrow I = +\infty$

In definitiva se $\alpha < 1$ $\quad I = +\infty$

$\forall \beta \in \mathbb{R}$

Quindi $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\lg x)^\beta}$ $\begin{cases} \text{conv. se } \alpha > 1 \ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \text{conv. se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{div. se } \alpha < 1 \ \forall \beta \end{cases}$