

Lezioni del 13 e 14 dicembre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente: Alessandra Cutrì

Argomenti: integrazione funzioni razionali negli argomenti $\sin x, \cos x, \tan x$ (sostituzioni $t = \tan x/2$), integrale di funzioni irrazionali (sostituzioni speciali), esercizi.

Argomenti: integrali impropri: funzioni non limitate su intervalli limitati o intervalli non limitati, integrabilità di funzioni tipo potenze, teoremi di confronto e confronto asintotico, esempi, int. di $1/x(\log x)^b$ sia all'infinito che vicino a zero, esempi

Integrale di funzioni razionali
In generale se si ha $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

$$\text{gr } P(x) < \text{gr } Q(x)$$

se $Q(x)$ ha grado n

$$\Rightarrow Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \text{ con } a_n \neq 0$$

• Si deve considerare la decomposizione di $Q(x)$ in fattori irriducibili

$$Q(x) = a_n (x-b_1)^{m_1} (x-b_2)^{m_2} \dots (x-b_k)^{m_k}$$

$$\cdot (x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1} \dots (x^2 + c_e x + d_e)^{m_e}$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2m_1 + \dots + 2m_e$$

$\Downarrow$

$$(x-b_1)^{m_1} \rightsquigarrow \frac{A_{11}}{x-b_1} + \frac{A_{12}}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x-b_1)^{m_1}}$$

$$(x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1} \rightsquigarrow \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + c_1 x + d_1} + \frac{C_{12}x + D_{12}}{(x^2 + c_1 x + d_1)^2} + \dots + \frac{C_{1m_1}x + D_{1m_1}}{(x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1}}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x-b_1} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-b_1)^{n_1}} + \frac{A_{21}}{x-b_2} + \dots + \frac{A_{2n_2}}{(x-b_2)^{n_2}} + \\ & + \frac{A_{k1}}{x-b_k} + \frac{A_{k2}}{(x-b_k)^2} + \dots + \frac{A_{kn_k}}{(x-b_k)^{n_k}} + \\ & \frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+c_1x+d_1} + \dots + \frac{C_{1m_1}x+D_{1m_1}}{(x^2+c_1x+d_1)^{m_1}} + \dots + \\ & \frac{C_{e1}x+D_{e1}}{x^2+c_ex+d_e} + \dots + \frac{C_{eme}x+D_{eme}}{(x^2+c_ex+d_e)^{m_e}} \end{aligned}$$

Tale rappresentazione è unica

Osserviamo che il metodo dei frazionamenti può portare al calcolo di

$$\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^m} \quad \text{per } m \geq 2$$

A.Cutri 10/12/18

con x^2+cx+d irriducibile

Osserviamo che come abbiamo fatto la lezione scorsa

$$x^2 + cx + d = x^2 + cx + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + d - \frac{c^2}{4}$$

essendo $d - \frac{c^2}{4} > 0$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{-discriminante}}$

$$\Rightarrow x^2 + cx + d = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + a^2$$

$$= a^2 \left[1 + \left(\frac{x + c/2}{a}\right)^2 \right]$$

$$y = \frac{x + c/2}{a} \Rightarrow dy = \frac{1}{a} dx$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + cx + d)^m} = \frac{1}{a^{2m-1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^m}$$

A.Cutro 10/12/18

$\Rightarrow$ sufficiente saper risolvere

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx \quad m \geq 2$$

($m=1 \leadsto \arctan x + c$)

$$I_m = \int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx$$
$$\int \frac{1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{(1+x^2)^m} dx = \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^{m-1}}}_{\text{A}} - \int \frac{\cancel{x^2} dx}{(1+x^2)^m}$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^m} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x \cdot \overset{g'}{x}}{(1+x^2)^m} dx = \frac{1}{2} x \frac{(1+x^2)^{1-m}}{1-m}$$

$$\frac{2x}{(1+x^2)^m} = \left(\frac{(1+x^2)^{1-m}}{1-m} \right)' - \int \frac{1}{2(1-m)} (1+x^2)^{1-m} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(1+x^2)^m} dx = \frac{1}{2(1-m)} \frac{x}{(1+x^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)} I_{m-1}$$

$$I_m = I_{m-1} - \frac{1}{2(1-m)} \frac{x}{(1+x^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(1-m)} I_{m-1}$$

$$I_m = \frac{1}{2(m-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}, \quad m \geq 2$$

$$I_m = \frac{1}{2(m-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1} \quad m \geq 2$$

Per esempio per $m=2$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

on: $(x^2+1)^2$ ha 2 radici complesse coniugate doppie $x = \pm i$

Per le radici doppie esiste anche un altro metodo: Calcoliamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan x + \int \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)} \right) dx$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Cx+D}{(x^2+1)} \right)$$

A.Cutri 10/12/18

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ax+B)(x^2+1) - Cx^2 - 2xD + C = 1$$

$$A=0; B=C; A-2D=0 \Rightarrow D=0; B+C=1$$

$$\Rightarrow B=C=1/2$$

Il metodo illustrato sopra è un caso particolare della **SCOMPOSIZIONE DI FRAZIONI** che vale per le funzioni razionali in cui il polinomio al denominatore ha radici multiple (cfr Teorema 8.17 BDG)

Vediamo un altro esempio di app. per radici DOBBIE del denominatore

in alcuni valori detti zeri

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} + \frac{Cx+D}{(x+1)(x+4)} + \text{CONT}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2 (x+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} +$$

A.Cutri 10/12/18

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Cx+D}{(x+1)(x+4)} \right)$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} + \frac{C(x^2+5x+4) - (Cx+D)(2x+5)}{(x+1)^2 (x+4)^2}$$

$$\Rightarrow A(x+1)(x+4)^2 + B(x+4)(x+1)^2 - Cx^2 - 2Dx + 4C - 5D = 1$$

troviamo A, B, C, D

Quindi le funzioni razionali
si se come integrarle

Spesso mediante opportune
sostituzioni si si riconduce
a funzioni razionali

Estraiamo alcune sostituzioni base

Per esempio se si deve integrare
una funzione razionale negli
argomento seno, cos la sostituzio-
ne base (e non si riesce a fare
meglio con altri accorgimenti) è

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

oss: Denotiamo con $R(x, y)$ una
funzione razionale in x con coeff.
che dipendono da y : $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ P, Q pol. in x con coeff. dipende da y

A.Curi 13/12/18

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

$$\text{p.es. } \int \frac{dx}{\sin x} ; \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} ; \int \frac{\cos x}{4 \sin x - 3 \cos x}$$

Con la sostituzione

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2 \arctan t$$

$$\boxed{dx} = \boxed{\frac{2}{1+t^2} dt}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \text{ diventa:}$$

$$\boxed{\sin x} = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} =$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} =$$

A.Cutri 13/12/18

$$= \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \tan^2 \frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

frangere
numeratore
in t

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

Ex:

$$1. \int \frac{dx}{\sec x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$2) \int \frac{\sec x}{\sec x + \cos x} dx = \int \frac{2t}{(1+t^2) \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{4t}{(1+t^2)(2t+1-t^2)} dt$$

$$-t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \quad t = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{D}{t-1-\sqrt{2}} = \frac{0 \cdot 4t}{(t^2+1)(t^2-2t-1)}$$

A.Cutri 13/12/18

→ resolve

↑
combinate
regno!

oss: non sempre conviene: per esempio
quando

$$\int R(\sec x, \cos x) dx = \int f(\sec x) \cos x dx$$

⇒ conviene $t = \sec x$

Example:

$$\int \frac{\sec x \cos^3 x}{1 + \sec^2 x} = \int \frac{\sec x (1 - \sec^2 x) \cos x dx}{1 + \sec^2 x}$$

$$t = \sec x \quad \leadsto \int \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{1+t^2} - \underbrace{\int \frac{(t^3 + t - t)}{1+t^2} dt}_u$$
$$- \int t dt + \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= -\frac{\sec^2 x}{2} + \log(1 + \sec^2 x) + C$$

cfr slides lesson
procedure

$$\leadsto t = \sec^2 x$$

Oss: se $Q(x)$ ha radici reali

x_0, x_1 di molteplicità 1

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-x_1} + \frac{R(x)}{S(x)}$$

con $S(x_0) \neq 0$ e $S(x_1) \neq 0$

Per det. A : moltiplico entrambi i membri per $(x-x_0)$

$$(x-x_0) \frac{P(x)}{Q(x)} = A + \frac{B(x-x_0)}{x-x_1} + \frac{R(x)(x-x_0)}{S(x)}$$

$\downarrow x \rightarrow x_0$ $\downarrow x \rightarrow x_0$

0 0

$$\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0) P(x)}{Q(x)}$$

Analogamente per det B , moltiplico entrambi i membri per $x-x_1$ e poi faccio $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{(x-x_1) P(x)}{Q(x)} = B$

Per esempio,

A.Cutri 13/12/18

$$\int \frac{-4t}{(t^2+1)(t^2-2t-1)}$$

ha come radici $t = 1 \pm \sqrt{2}$

$$\frac{A}{t-(1-\sqrt{2})} + \frac{B}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{Ct+D}{t^2+1} = \frac{-4t}{(t^2+1)(t^2-2t-1)}$$

$$A = \lim_{t \rightarrow 1-\sqrt{2}} \frac{-4t(t-1+\sqrt{2})}{(t^2+1)(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-4(1-\sqrt{2})}{((1-\sqrt{2})^2+1)(1-\sqrt{2}-1-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-4(1-\sqrt{2})}{-2\sqrt{2}(1+2-2\sqrt{2}+1)} = \dots$$

$$B = \lim_{t \rightarrow 1+\sqrt{2}} \frac{-4t(t-1-\sqrt{2})}{(t^2+1)(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})} = \dots$$

non A e B det C, D con il metodo standard

Per le radici reali doppie

non può usare

- metodo di dominio
derivate e trovare
i coefficienti in
modo classico
e derivate di Hermite

oggi vediamo come calcolare
i coeff. in un modo più veloce

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x+4)^2} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \right. + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2} \Big) dx$$

dove i coeff. A B C D si trovano
sfruttando che

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2}$$

se moltiplichiamo tutto per $(x+1)^2$
moltiplicare
per

$$\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2(x+4)^2} = A(x+1) + B + \frac{C(x+1)^2}{x+4} + D \frac{(x+1)^2}{(x+4)^2}$$

A.Cutri 13/12/18

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+4)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 P(x)}{Q(x)}$$

Per determinare A

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{d}{dx} \left[(x+1)^2 \frac{P(x)}{Q(x)} \right]$$

Analogoamente

$$D = \lim_{x \rightarrow -4} (x+4)^2 \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{d}{dx} \left[(x+4)^2 \frac{P(x)}{Q(x)} \right]$$

Sostituzione utile per calcolo di integrali di funzioni irrazionali

A.Cutri 13/12/18

ES

$$\int x \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx = I \quad \text{ricerca di una sostituzione razionale}$$

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \quad (7,0) \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = t^2$$

$$\Rightarrow (x+1) = t^2(x+2) \Rightarrow x(t^2-1) = 1-2t^2$$

$$x = \frac{1-2t^2}{t^2-1} =: \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t) dt \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{-4t(t^2-1) - 2(1-2t^2)}{(t^2-1)^2}$$

$$= \frac{2t}{(t^2-1)^2}$$

$\Downarrow$

$$I = \int \frac{(1-2t^2)}{t^2-1} t \cdot \frac{2t}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{2t^2 - 4t^4}{(t^2-1)^3} dt$$

$$(t^2-1)^3 = (t-1)^3(t+1)^3 \rightarrow \int \frac{P}{Q} \quad \text{procedimento standard}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

$$\Rightarrow t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$x(ct^n - a) = b - dt^n$$

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a} \Rightarrow dx = \frac{-dn t^{n-1}(ct^n - a) - cnt^{n-1}(b - dt^n)}{(ct^n - a)^2} dt$$

$$\boxed{dx = \frac{(adn - cnb)t^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt}$$

$$\Rightarrow \int R\left(\frac{b - dt^n}{ct^n - a}, t\right) \frac{(adn - cnb)t^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt$$

ES: Anche questo integrale si può risolvere a quanto visto ora

$$\int \frac{\sqrt{2-4x^2}}{x+3} dx$$

Integrale

$$\int \frac{\sqrt{2-4x^2}}{x+3}$$

Posma $\sqrt{2-4x^2} \leadsto \sqrt{1-y^2}$

per $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{(1-y)(1+y)} = (1+y) \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$

-1 di dom di
integrazione
 $y \rightarrow -1$
singolare!! $t \geq 0$

Quindi

$$\sqrt{2-4x^2} = \sqrt{2} \sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}$$

$$y = \sqrt{2}x \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dy$$

$$\int \frac{\sqrt{2-4x^2}}{x+3} dx = \int \frac{\sqrt{1-y^2}}{\frac{y}{\sqrt{2}}+3} \frac{1}{\sqrt{2}} dy$$

$$= \int \frac{(1+y)}{\frac{y}{\sqrt{2}}+3} \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} dy$$

$$- t^2 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

$$t^2 = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow y(t^2+1) = 1-t^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dy = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

Sottolineare

A.Cutri 13/11/18

$$\int \frac{1+t^2}{(1+t^2)\sqrt{2}+3} t \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= \int \frac{-8t^2}{(1+t^2)^3} \cdot \frac{(1+t^2)\sqrt{2}}{1-t^2+3\sqrt{2}(1+t^2)} dt$$

⇒ funzione razionale da integrare

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$$

• $\sqrt{1-x^2} = (1+x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t \geq 0$
 $\frac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

⇒ metodo precedente

oppure $x = \cos t$ da $x^2 = \cos^2 t$

⇒ $\int R(\cos t, \sin t) (-\sin t) dt$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + c}) dx \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

p.es. $\int \sqrt{1+x^2}$

si cerca l'ellittica variabile con la
dando una sostituzione che
faccia in modo che $x^2 + c$ diventi
un quadrato perfetto:

è tale che $x^2 + c = (x+t)^2$

$$\cancel{x^2} + c = \cancel{x^2} + 2tx + t^2 \Rightarrow x = \frac{c - t^2}{2t}$$

$$dx = \frac{-2t(2t) - 2(c - t^2)}{4t^2} = -\frac{2t^2 + 2c}{4t^2}$$

$$(t = -x + \sqrt{x^2 + c} \quad (\text{nel caso } t > 0))$$

Es:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 3}} dx$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = (x+t)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 3 = \cancel{x^2} + 2tx + t^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 - t^2}{2t} \Rightarrow dx = \frac{-4t^2 - 2(3 - t^2)}{4t^2} = \frac{-2t^2 - 6}{4t^2}$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \int \frac{(-2t^2 - 6) dt}{\left[\frac{3-t^2}{2t} + \left(\frac{3-t^2}{2t} + t \right) \right] 4t^2}$$

$\underbrace{\frac{3-t^2}{2t} + \left(\frac{3-t^2}{2t} + t \right)}_{\frac{3+t^2}{2t}}$

A.Cutri 14/12/18

$$= \int \frac{-(2t^2 + 6)}{\frac{6}{2t} \cdot 4t^2} dt = - \int \frac{2(t^2 + 3)}{12t} dt =$$

$$= -\frac{1}{6} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \lg |t| + C$$

$$t = -x + \sqrt{x^2 + 3} \quad (> 0)$$

$$= -\frac{1}{12} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right)^2 - \frac{1}{2} \lg \left(-x + \sqrt{x^2 + 3} \right) + C$$

In generale si abbiamo

A.Cutri 14/12/18

$$\int_{\mathbb{R}} (x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

se $a > 0$ $\leadsto$

$$ax^2+bx+c = a(x+t)^2$$

$$= a(x^2 + 2tx + t^2)$$
$$= ax^2 + 2atx + at^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{at^2 - c}{b - 2at}}$$

$$dx = \frac{2at(b-2at) + 2a(at^2 - c)}{(b-2at)^2} dt$$
$$= \frac{-2a^2t^2 + 2atb - 2ac}{(b-2at)^2}$$

se $a < 0$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \text{ altrimenti}$$

$ax^2+bx+c < 0 \rightarrow$ non puoi mai
entrare la radice quadrata

Quindi $c < \frac{b^2}{4a}$

A.Cutri 14/12/18

$$ax^2 + bx + c = \underbrace{ax^2 + bx + c - \frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{4a}}_{=d > 0}$$

$$= -(\sqrt{-a}x)^2 - (-bx) - \frac{b^2}{4(-a)} + d$$

$$= -\left(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

y'' nuova variabile

$$z = -y^2 + d$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{d - y^2}$$

$$\sim \sqrt{1 - y^2}$$

$$(oss: dy = \sqrt{-a} dx)$$

Se $a > 0$ analogamente la sostituzione standard

$$y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow dy = \sqrt{a} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{y^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

Integrali impropri

L'integrale di Riemann si riferisce

• funzioni continue

necessario per
definite come
superiore e inferiore

• in intervalli chiusi
e aperti

necessario per
definire la partizione

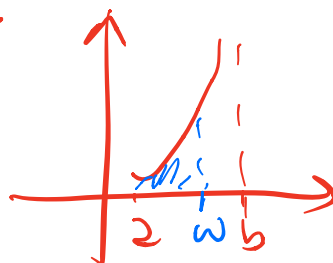
cerchiamo di estendere le nozioni
di integrale eliminando queste
due ipotesi

1° caso: consideriamo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
non limitate:

Sia $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $b < \infty$

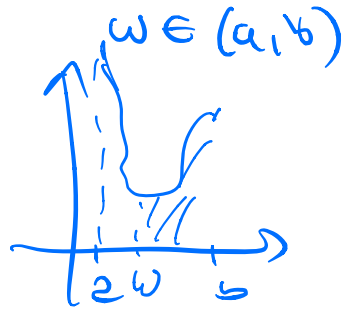
$\forall w \in (a, b)$ $f \in R(a, w)$ e

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$$



(analogamente $f \in \mathcal{R}(a, b) \forall w > a$

e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$



Nel primo caso se

$\exists$ finito $\lim_{w \rightarrow b^-} \int_a^w f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$
 integrale improprio di f

(analogamente nel secondo caso se

$\exists$ finito $\lim_{w \rightarrow a^+} \int_w^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$
 integrale improprio di f

Esempio: $f(x) = x^\alpha \quad x \in (0, 1) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ se $\alpha < 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

ma $\forall w > 0$ $\int_w^1 f(x) dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_w^1 & \alpha \neq -1 \\ \log|x| \Big|_w^1 & \alpha = -1 \end{cases}$

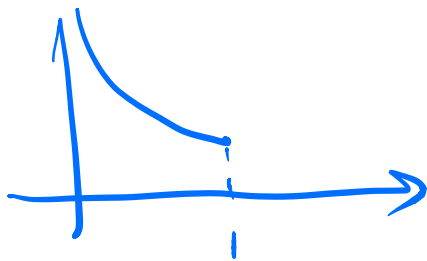
Quindi

$$\int_w^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ -\lg|w| & \alpha = -1 \end{cases}$$

vediamo che succede se $w \rightarrow 0^+$

$$\text{se } \alpha > -1 \Rightarrow \alpha > -1 \quad \text{ben } \lim_{w \rightarrow 0^+} \int_w^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

$\Rightarrow \int_0^1 x^\alpha dx$ esiste in senso improprio
anche per $-1 < \alpha < 0$



es $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integr.

in senso improprio
in $(0, 1)$

mentre $\frac{1}{x}$ non è integrabile in

A.Cutri 14/12/18

senso improprio in $(0, 1)$

$\Rightarrow \frac{1}{x}$ non è integrabile in senso improprio in
alcun intervallo contenente $x=0$ perché se
facciamo $\int_{\frac{1}{w}}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\substack{w \rightarrow 0^+ \\ \frac{1}{w} \rightarrow \infty}} \int_{\frac{1}{w}}^1 \frac{1}{x} dx + \int_w^1 \frac{1}{x} dx = \lg|1| - \lg|\frac{1}{w}| \rightarrow \infty$

Oss: non ci devono essere salti tra w e x
 (potremmo $x = -w$ $|f(x)| - |f(w)| \rightarrow 0$ ma non
 deve fare!!)

Oss: se $f \in \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx =$

$$= \lim_{w \rightarrow a^+} \int_w^b f(x) dx$$

$$= \underbrace{\int_w^b f(x) dx}_{\text{le funzioni integrate che \u00e9 continue?}}$$

le funzioni integrate
 che \u00e9 continue?
 se $f \in \mathcal{R}(a, b)$

o anche
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{w \rightarrow b^-} \int_a^w f(x) dx$$

(quindi l'integrale improprio \u00e9 una generalizzazione dell'int di Riemann)

se $f: [a, c) \cup (c, b)$ funzione continua
 in un intorno di c

$\int_a^b f(x) dx$ esiste e \u00e9 finito $\Leftrightarrow \int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ integrabili
 improprio

Es:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$(1-x)(1+x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$

$$= \lim_{\omega \rightarrow -1^+} \int_{\omega}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\gamma \rightarrow 1^-} \int_0^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow -1^+} \arcsin x \Big|_{\omega}^0 + \lim_{\gamma \rightarrow 1^-} \arcsin x \Big|_0^{\gamma}$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow -1^+} \arcsin \gamma - \arcsin \omega = \pi$$

$\gamma \rightarrow 1^-$ } separatamente!

In generale se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$
 f non è mutata in un intorno di x_i
 $i=1, \dots, N$

Divide $[a, b]$ in N intervalli
 in modo che in ognuno di essi
 f sia non mutata in un solo
 estremo e si procede come

2° caso : integrale improprio di
funzioni su intervalli
non limitati

sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$\forall w > a \quad f \in \mathcal{R}(a, w)$

$\Downarrow$
non può considerare

$$F(w) = \int_a^w f(x) dx$$

Se $\exists \lim_{w \rightarrow +\infty} F(w) = L$ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

(quindi $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_a^w f(x) dx$
seconda parte)

Analogamente, se $f: (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$

t.c. $\forall w < b \quad f \in \mathcal{R}(w, b)$

Se $\exists \lim_{w \rightarrow -\infty} \int_w^b f(x) dx = L$ $\int_{-\infty}^b f(x) dx$

Oss: $x \in f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \forall [a, b]$ limitato
 $f \in \mathcal{R}(a, b)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

se entrambi esistono
finito in senso improprio
($c \in \mathbb{R}$ in qualsiasi punto)

Es: Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$
in $[1, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{per quali } \alpha \in \mathbb{R} \text{ esiste?}$$

$$\int_1^w \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (w^{1-\alpha} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \lg w & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{1}{x^{\alpha}}$ è integrabile in senso improprio all' ∞ se e solo se $\boxed{\alpha > 1}$

ATTENZIONE ! Non a fe il

Conte delle funzioni integrabili
 che $\frac{1}{x^{\alpha}}$ lim delle funzioni
 integrabili $\int_1^{\omega} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} L$ finito $\uparrow$
 $\alpha > 1$

Oss: $\frac{1}{x^{\alpha}} \rightarrow 0$ $\forall x > 0$ ma all' ∞
 è int. solo se $\underline{\alpha > 1}$

Confrontando con quanto noto per

$\frac{1}{x^{\alpha}}$ è integrabile vicino a zero
 se $\alpha < 1$

Exemplo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx \text{ existe finito?}$$

$$\int_0^{\omega} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\omega} = -e^{-\omega} + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (-e^{-\omega} + 1) = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

obs: $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} (1 - e^{-\omega}) = +\infty$
(non)

$\Rightarrow$ non existe finito $\int_{\mathbb{R}} e^{-x} dx$

Exercício

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^{\omega} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

A.Cutr 14/12/18

$$= \lim_{\substack{\gamma \rightarrow -\infty \\ \omega \rightarrow +\infty}} (\arctan \omega - \arctan \gamma) = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

In tutti gli esempi precedenti
per verificare l'esistenza
dell'integrale improprio abbiamo
scelto una primitiva e per
fatto le limiti della primitiva

Sfioro che interesso conoscere
quanto vale un integrale
improprio ma solo sapere se
è convergente o meno

Non sempre è facile determinare una
primitiva -

Se non si deve conoscere il
valore dell'integrale improprio
ma sapere solo se converge o meno

Per questo ci sono dei criteri che
fanno riferimento a

funzioni integrande $f(x) \geq 0$

A.Cutri 14/12/18

$\Rightarrow$ la funzione integrale è monotona
crescente :

Se $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\forall w \in (a,b)$

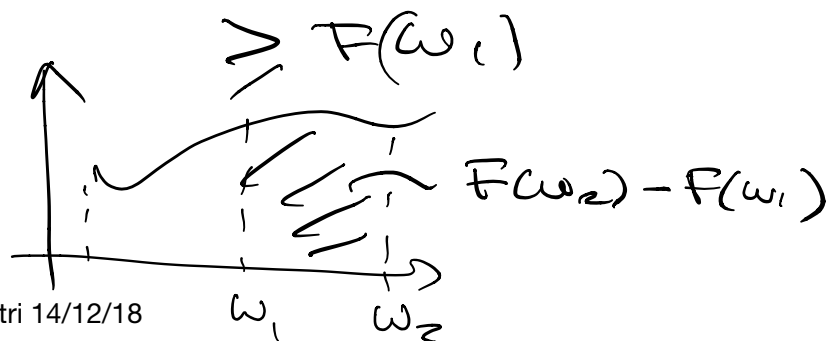
$f \in R(a,w)$

$\int_a^b f(x) dx$ existe e é finito

$$\lim_{w \rightarrow b^-} \int_a^w f(x) dx = \lim_{w \rightarrow b^-} F(w)$$

Se $f \geq 0 \Rightarrow F \uparrow$ e fctt e
 $w_1 < w_2$

$$F(w_2) = \int_a^{w_2} f(x) dx = F(w_1) + \int_{w_1}^{w_2} f(x) dx$$



A.Cutri 14/12/18

oss: se fctt monotone $\uparrow$
 sempre lte finito e se
 limitate superiormente, qual
 perche $\exists \lim_{w \rightarrow b^-} F(w)$ e sufficiente
 $\lim_{w \rightarrow b^-} F(w) \leq L$

Oss: Vale risultato analogo

se $f \leq 0$ in $[2, b)$ per cui u tel
(so $f \leq 0 \rightarrow$ per cui converge
è suff. che in questo infor.

Da queste osservazioni
 $\downarrow$

Teorema di confronto 1

Siano $f, g : [2, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

integrabili in $[2, w]$ $\forall w < b$
+

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in w_-(b)$$

$\Rightarrow$

se $g \in \text{INT.}$ in senso improprio in (a, b)

$\Rightarrow f \in \text{INT.}$ " " " "

se f $\in \text{INT.}$ in senso improprio in (a, b)

$\Rightarrow g \in \text{INT.}$ " " " "

Dir: Per cui $\forall w < b$

$$\int_a^w f(x) dx \leq \int_a^w g(x) dx$$

$$F(w) \leq G(w)$$

$\rightarrow$ se $\exists \lim_{w \rightarrow b^-} G(w)$ finito

$\Rightarrow G$ è limitata su $[a, b)$

$\Rightarrow F$ è limitata su $[a, b)$
ed essendo $F \uparrow \Rightarrow F$ converge
a un limite finito per $w \rightarrow b^-$

Analogamente se f non è
un T. in senso negativo

$$\Rightarrow \lim_{w \rightarrow b^-} F(w) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{w \rightarrow b^-} G(w) = +\infty$$

A.Cutri 14/12/18

Analogamente per $f \in \mathcal{R}(w, b)$
 $\forall w > a$ + $0 \leq f(x) \leq g(x)$
in $U_+(a)$

Teorema del confronto asintotico

semo $f, g \geq 0$ e $f, g \in \mathcal{R}(w, b)$
 $\forall w > a$

$f = O(g)$ per $x \rightarrow a^+$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$)

$\Rightarrow$ f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile
in senso improprio in (a, b) in senso improprio in (a, b)

Analogamente: $f, g \geq 0$
 $f, g \in \mathcal{R}(a, w)$ $\forall w < b$

$f = O(g)$ per $x \rightarrow b^-$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

$\Rightarrow$ f int. in senso improprio in (a, b) $\Leftrightarrow g$ int. in senso improprio in (a, b)

Def: $f = O(g)$ $\Leftrightarrow \left| \frac{f}{g} \right| \leq L$ $x \rightarrow x_0$

Esercizio

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 (2 + \cos x)}$$

$f(x) = \frac{1}{x^2 (2 + \cos x)}$ è continua e limitata in $[1, +\infty)$

$$\Rightarrow \forall \omega > 1 \quad f \in \mathcal{R}[1, \omega]$$

$$\bullet f \geq 0 \quad \text{perché } \cos x \in [-1, 1]$$

$$\bullet 0 \leq f \leq \frac{1}{x^2}$$

esempio $\frac{1}{x^2}$ integrabile universalmente in $[1, +\infty)$ ($\alpha \geq 2 \geq 1$)

$\Rightarrow I$ è finito (cioè l'integrale converge)

Exercice

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x} > 0 \quad \forall x \in [2, +\infty)$$

$$e^x \leq x \quad \forall x \geq 0$$



Car on a $e^x \leq x-1$ $\forall x$ proche

e^x est concave ($f'' = -\frac{1}{x^2} < 0$)

$y = x-1$ est la tg. en $x=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{x} \quad \text{en } [2, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty \quad \Rightarrow I = +\infty$$

del confronto asintotico
 +
 integrabilità in senso improprio
 delle funzioni $\frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha < 1$
 in $(0,1)$ (in un intorno di $x=0$)
 $\Downarrow$

$\alpha \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

e $f(x)$ ha valore di infimo

β per $x \rightarrow 0$ cioè $\frac{f(x)}{(\frac{1}{x})^\beta} \rightarrow L \neq 0$
 $L \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \quad x \rightarrow 0$

Quindi $\int_0^1 f(x) dx$ converge

$\Leftrightarrow \beta < 1$

Sviloppiamo, se $f \geq 0$

$f \geq 0$ $x \rightarrow +\infty$ con ordine

β allora $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$

$\Leftrightarrow \beta > 1$

(visto che $\int \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1$)

Attenzione: il risultato vale
se f ha ordine peresenzia

di α sufficientemente per $x \rightarrow +\infty$

e tale ordine $\alpha > 1$

$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \rightarrow +\infty$ non è

sufficiente a garantire

l'integrabilità di f all'inf.

ES: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

$$\frac{1}{x \ln x} = o\left(\frac{1}{x}\right)_{x \rightarrow +\infty}$$

$$\text{Però } \int_2^w \frac{1}{x \lg x} = \frac{1}{1 - \lg x} \int_2^w \frac{1}{y} dy =$$

$$\lg(\lg w) - \lg(\lg 2)$$

$$\rightarrow +\infty \text{ se } w \rightarrow +\infty$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \lg x} = \boxed{+\infty}$$

$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\swarrow$ l'integrale può divergere
è diverso da

$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ con $\beta > 1$
 $\nwarrow$ l'integrale converge

A.Cutri 14/12/18

Vediamo cose accade

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\lg x)^\beta} dx \quad f(x) = \frac{1}{x (\lg x)^\beta} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ma non converge

Permanet, una proutie intel
caso

$$\int_2^w \frac{1}{x(\lg x)^\beta} dx = \int_{\lg 2}^{\lg w} \frac{1}{y^\beta} dy$$

$$\begin{aligned} & \beta \neq 1 \\ & (\beta \neq 1 \text{ que hetroto}) \end{aligned} \quad = \quad \left[\frac{(\lg w)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\lg 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]$$

↓ $F(w)$

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} F(w) = \begin{cases} \text{finito se } 1-\beta < 0 \\ \text{coe } \beta > 1 \\ +\infty \text{ se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\lg x)^\beta} dx \quad \begin{aligned} & \text{converge se } \beta > 1 \\ & \text{diverge se } \beta \leq 1 \end{aligned}$$

le funzioni $\frac{1}{x(\lg x)^\beta}$ possono
essere per
confronto

de succede atunci a x=0?

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x (\lg x)^\beta} dx$$

Care a
converge
a valorii β ?

$$\int_{\omega}^{1/2} \frac{1}{x (\lg x)^\beta} dx = \int_{\lg \omega}^{\lg(1/2)} \frac{1}{y^\beta} dy$$

$$\beta \neq 1 \quad = \quad \frac{(\lg(1/2))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\lg \omega)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

$$\omega \rightarrow 0^+ \quad \begin{cases} \text{finite} \approx \beta > 1 \\ \text{infinit} \approx \beta < 1 \end{cases}$$

$$\beta > 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \lg(\lg \omega) = +\infty$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x (\lg x)^\beta} dx \quad \begin{cases} \text{converge} \approx \beta > 1 \\ \text{diverge} \approx \beta \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio: determinare $\beta > 0$

t.c.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^\beta}{x^2} dx \text{ convergente}$$

- il problema si pone se $x \rightarrow 0^+$
(funzione detta) e per $x \rightarrow +\infty$

Spezziamo l'integrale in modo da avere "il problema" in un solo punto: per esempio

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{|\sin x|^\beta}{x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^\beta}{x^2} dx}_{I_2}$$

$I \text{ converge} \Leftrightarrow I_1 \text{ e } I_2 \text{ convergono}$

- Studiamo I_1

$$f(x) = \frac{|\sin x|^\beta}{x^2} \geq 0 \text{ e per } x \rightarrow 0^+$$

$$f(x) = \frac{x^\beta}{x^2} \text{ (inc.)} \Rightarrow f(x) = O(x^{\beta-2})$$

Se $p \geq 2$ f è continua in $(0,1)$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{R}(0,1)$$

$$\Rightarrow I_1 < +\infty$$

se $\beta < 2$ $f \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0^+$

con ordine di infinito $= 2-\beta$

$\Rightarrow$ I_1 è finito se $2-\beta < 1$
T. comp. case per $\beta > 1$

$\Rightarrow$ I_1 converge per $\beta > 1$

(se $\beta \leq 1$ $f = O(\frac{1}{x^\gamma})$ con $\gamma \geq 1$

$\Rightarrow I_1$ diverge)

• Stobhamo $I_2 = \int_1^{\infty} \frac{|f(x)|^\beta}{x^\alpha} dx$

A.Cutri 14/12/18

$$0 \leq \frac{|f(x)|^\beta}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall \beta \geq 0$$

all'esempio $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty \Rightarrow I_2$ conv. sempre

Quiti $I < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1$