

Esercizi di neflogo:

1. Studiare la funzione
 $f(x) = (x-1)e^{5/x}$ e disegnare
un grafico qualitativo (de esame 5/9/18)

$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
 f è continua in $\text{dom } f$ perché
prodotto e composizione di funzioni
continue

$$f \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

ha asintoti obliqui?

$$\begin{aligned} \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (x > 1 \text{ def}) \quad f(x) &= (x-1)e^{5/x} = (x-1) \left(1 + \frac{5}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &\quad \left(x \rightarrow +\infty \quad \frac{5}{x} \rightarrow 0\right) \\ &= x-1 + 5 + o(1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = x+4$ è asintoto obl. a $+\infty$

Atte: $f(x) = (x-1)(1+o(1))$ questo non significa
che $y = x-1$ è as. obl. perché
 $f(x) \sim (x-1) + o(x-1)$
 $\uparrow$ sempre indet. !
se $x \rightarrow +\infty$.

per $x \rightarrow -\infty$

$$(x < 1 \text{ def}) \Rightarrow f(x) = (1-x)e^{5/x} = (1-x) \left(1 + \frac{5}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ = (1-x) - 5 + o(1)$$

$y = -4 - x$ è asint. dd. $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)e^{5/x} = +\infty \Rightarrow x=0 \text{ asint. to verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)e^{5/x} = 0$$

Per $x \neq 1$ f è derivabile ed essendo

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{5/x} & x > 1 \\ (1-x)e^{5/x} & x < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{5/x} + (x-1)e^{5/x} \left(-\frac{5}{x^2}\right) & x > 1 \\ -e^{5/x} + (1-x)e^{5/x} \left(-\frac{5}{x^2}\right) & x < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = e^5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -e^5$$

$\Rightarrow f$ non è derivabile in $x=1$ ed ha un punto angoloso

$$f'_+(1) = e^5$$

$$f'_-(1) = -e^5$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{5/x} \left(1 + 5 \frac{(1-x)}{x^2}\right) & x > 1 \\ -e^{5/x} \left(1 + 5 \frac{(1-x)}{x^2}\right) & x < 1 \end{cases}$$

Perché $\frac{e^{5/x}}{x^2} > 0$ $\operatorname{sgn}(f') = \operatorname{sgn} \begin{cases} x^2 + 5(1-x) & x > 1 \\ -(x^2 + 5(1-x)) & x < 1 \end{cases}$

che $x^2 + 5(1-x) = x^2 - 5x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow$ essendo $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} > 1$ $(\Rightarrow 5 - \sqrt{5} > 2 \quad \sqrt{5} < 3 \text{ vero})$

$\operatorname{sgn} f'$

1	$\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$
-	+	-
↘	↗	↘
↘	↗	↘

$x = 1$ pto di minimo relativo (quoziente, in)

$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ pto di mass rel.

$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ pto di min rel.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{5}{x}} \left(-\frac{5}{x^2}\right) \frac{x^2 + 5 - 5x}{x^2} + e^{\frac{5}{x}} \frac{(2x-5)x^2 - 2x(x^2 - 5x + 5)}{x^4} & x > 1 \\ -e^{5/x} \left(-\frac{5}{x^2}\right) \frac{x^2 + 5 - 5x}{x^2} - e^{5/x} \frac{(2x-5)x^2 - 2x(x^2 - 5x + 5)}{x^4} & x < 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{5}{x}} \left(\frac{5}{x^4}\right) (-x^2 - 5 + 5x + x^2 - 2x) & x > 1 \\ + e^{5/x} \left(\frac{5}{x^4}\right) (x^2 + 5 - 5x - x^2 + 2x) & x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{per } f''(x) = \begin{cases} \text{neg} (3x-5) & x > 1 \\ \text{neg} (-3x+5) & x < 1 \end{cases}$$

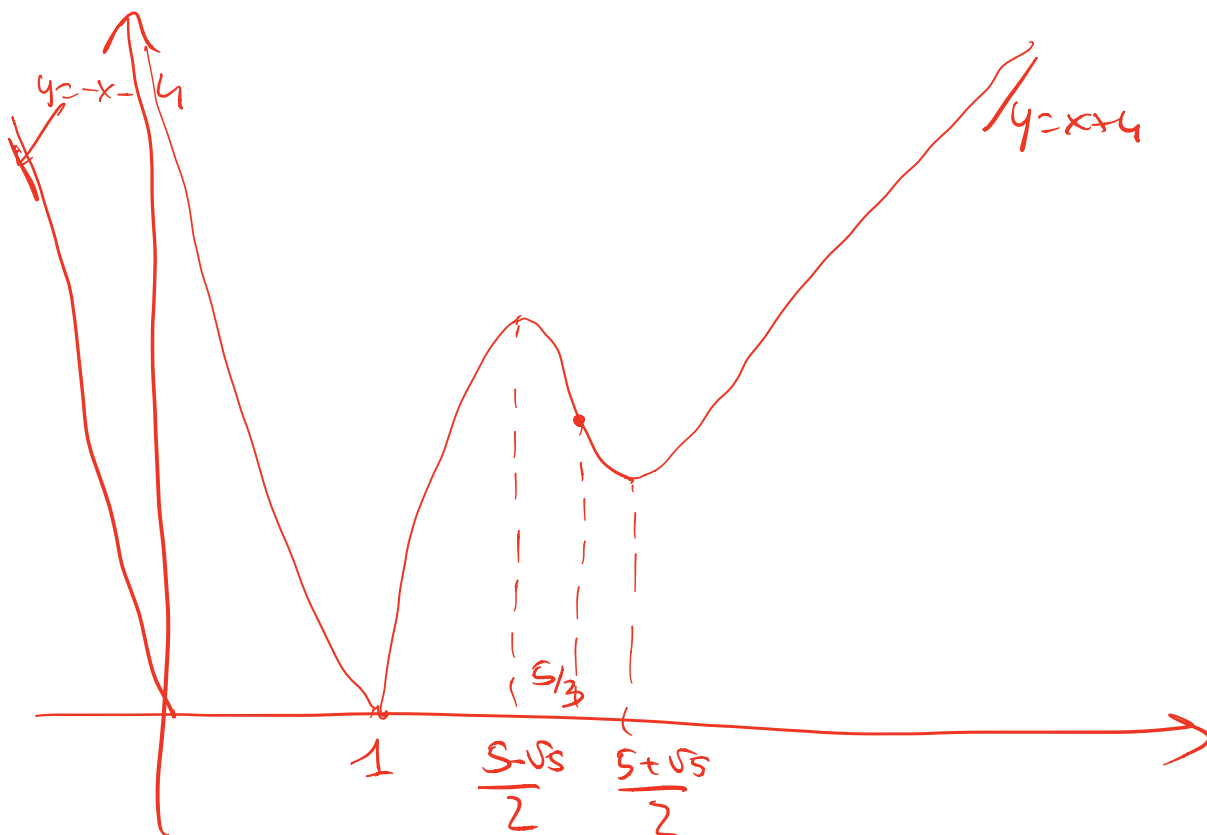
↓

$$f'' > 0 \quad \text{se } x > 5/3 \quad \Rightarrow f \text{ convessa}$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{se } x \in (1, 5/3) \Rightarrow f \text{ concava}$$

$$f'' > 0 \quad \text{se } x < 1 \Rightarrow f \text{ convessa}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ punto di flesso}$$



oss: per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = (x-1)e^{5/x} = (x-1) \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{25}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= x - 1 + 5 - \frac{5}{x} + \frac{25}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x + 4 + \frac{15}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

> 0 se $x \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow f(x) > x + 4$ def per $x \rightarrow +\infty$
(è sopra l'asintoto obliquo)

Peraltro f è convessa per $x \rightarrow +\infty$

Perché per $x \rightarrow -\infty$

$$f(x) = (1-x)e^{5/x} = (1-x) \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{25}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= 1 - x - 5 + \frac{5}{x} - \frac{25}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -x - 4 - \frac{15}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > -x - 4$$

$x < 0 \Rightarrow f$ è sopra l'asintoto per $x \rightarrow -\infty$

Esercizio (22 esame 5/9/18)

Dare la definizione di convergenza di una serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

+ Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n \log \left(1 + \frac{n^\alpha}{n^{4+1}} \right)}_{a_n} \quad (\infty)$$

$a_n \geq 0$ attenzione: se $\alpha \geq 4$ $a_n \rightarrow +\infty$
 $\rightarrow$ la serie non converge

$$\text{se } \alpha < 4 \quad \frac{n^\alpha}{n^{4+1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \log \left(1 + \frac{n^\alpha}{n^{4+1}} \right) \sim \frac{n^\alpha}{n^4} (1 + o(1))$$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}} (1 + o(1)) \quad \leadsto \text{criterio del
comportamento asintotico}$$

$$\text{converge} \Leftrightarrow 3 - \alpha > 1 \\ \alpha < 2$$

Esercizio (de esame del 5/9/18)

Calcolare $\int_0^1 \arctan \sqrt{2-t} \, dt$

$$\stackrel{\text{p.p.}}{=} \left. t \arctan \sqrt{2-t} \right|_0^1 - \int_0^1 t \frac{1}{1+(2-t)} \frac{-1}{2\sqrt{2-t}} dt$$

$$= \arctan 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{2-t} (1+(2-t))} dt = (*)$$

$$y = \sqrt{2-t} \Rightarrow 2-t = y^2 \Rightarrow t = 2-y^2 \quad dt = -2y dy$$

$$\int \frac{t \, dt}{\sqrt{2-t} (1+(2-t))} = \int \frac{(2-y^2)(-2y) \, dy}{y(1+y^2)} =$$

$$= \int \frac{-4+2y^2}{1+y^2} dy = 2 \int \frac{(y^2-2)}{y^2+1} dy = 2y - 6 \arctan y$$

$$\Rightarrow (*) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[2\sqrt{2-t} - 6 \arctan \sqrt{2-t} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[2 - \frac{3\pi}{4} - 2\sqrt{2} + 6 \arctan \sqrt{2} \right] = -\frac{\pi}{2} + 1 - \sqrt{2} + 3 \arctan \sqrt{2}$$

Oppure da altro art. $y = \sqrt{2-t}$

$$\Rightarrow t = 2-y^2 \quad dt = -2y \, dy$$

$$\int_{\sqrt{2}}^1 (\arctan y) (-2y) dy = - \int_1^{\sqrt{2}} 2y \arctan y \, dy$$

per per per

Esercizio (de esame del 17/9/18)

funzione che conv. semplice e
assoluta di

$$\sum (-1)^n (\sqrt[n]{4} - 1) \quad (*)$$

$$a_n = \sqrt[n]{4} - 1 \geq 0 \quad a_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

per la conv. assoluta vediamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_n = 4^{1/n} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 4} - 1$$

$$\approx \frac{1}{n} \log 4 \quad (1+o(1))$$

$\Rightarrow a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ la serie non conv. assolutamente

per la conv. semplice di $(*)$

$a_n \rightarrow 0$ ok bisogna vedere se
è definitivamente decrescente

$$f(x) = 4^{1/x} - 1 = e^{\frac{1}{x} \log 4} - 1 \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x} \log 4} \left(-\frac{\log 4}{x^2} \right) < 0$$

$\Rightarrow f' < 0 \Rightarrow a_n > 0 \Rightarrow$ la serie conv. semplice

Esercizio (de esame del 17/9/18)

Dopo aver dato la definizione di ordine di infinitesimo per una funzione infinitesima per $x \rightarrow 0^+$ (vedere se esiste l'ordine di infinitesimo di

$$f(x) = \int_0^x t \cos(1-t^2) dt \quad e$$

$$g(x) = \int_0^x \frac{t^2 (e^t - 1)}{\ln(1+t\sqrt{t})} dt \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

f e g sono infinitesime perché le

funzioni integrande sono integrabili per x vicino a zero

L'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow 0^+$ è $\beta > 0$ b.c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\beta} = L \neq 0$ L finito

no, per il T.F.C. ed il T.d. de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos(1-x^2)}{\beta x^{\beta-1}}$$

Questi $\beta - 1 = 1 \Rightarrow \beta = 2$

Per $g(x) : \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\beta} = n \neq 0$ finito

(2)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x)}{\beta x^{\beta-1}} \stackrel{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 (e^x - 1)}{\beta x^{\beta-1} \ln(1+x)} \\
 &\stackrel{\text{T.F.C.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2-\frac{1}{2}+1-\beta} (1+o(1))}{\beta x^{\beta-1} \ln(1+x)} \\
 &\stackrel{\text{L'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2-\frac{1}{2}+1-\beta} (1+o(1))}{\beta x^{\beta-1} \ln(1+x)}
 \end{aligned}$$

$\rightarrow n \neq 0 \text{ se } \beta = \frac{5}{2}$

Per la def di ordine di infinitesimo
confrontare limiti di Teorema
(o disporre)